IX ESERCITAZIONE DI AM1B

In questa lezione trattiamo l'integrazione di funzioni razionale. Alla fine daremo l'esempio di una funzione derivabile non C^1.

1. Integrazione di funzioni razionali

Siano

$$A(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$$
$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$$

e consideriamo

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

definita su $\{x \in \mathbb{R} | B(x) \neq 0\}$. Diamo un algoritmo per il calcolo di una primitiva della funzione razionale.

Passo I. Se $n = 0$ la funzione f è un polinomio di grado m ed è immediato trovare una primitiva. Se invece $n \geq 1$, ci si riduce al caso $m < n$ eseguendo la divisione di $A(x)$ per $B(x)$. E si ottiene

$$\frac{A(x)}{B(x)} = A_1(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

e dunque una primitiva di f si ottiene sommando una primitiva di $A_1(x)$ ed una di $\frac{R(x)}{B(x)}$ dove ora il nimeratore ha grado strettamente minore del grado di $B(x)$.

Passo II Si calcolano ora le n radici complesse, contate con la loro molteplicità, di $B(x)$. Poiché $B(x)$ è a coefficienti reali se $z = \alpha + i\beta$ è una sua radice allora anche il suo coniugato $\bar{z} = \alpha - i\beta$ lo è, con la stessa molteplicità. Inoltre si ha

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Indichiamo con x_i, $i = 1, \ldots, r$, le radici reali di $B(x)$ e con k_i le rispettive molteplicità. E con $z_j = \alpha + i\beta$ e $\bar{z}_j = \alpha - i\beta$, $j = 1, \ldots, s$, indichiamo le radici complesse coniugate con rispettive molteplicità h_j.

Passo III Supponendo $b_0 = 1$, come si può sempre ottenere dividendo denominatore e numeratore per b_0, scriviamo il polinomio $B(x)$ nella forma

$$B(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r}((x - \alpha_1)^2 - \beta_1^2)^{h_1} \ldots ((x - \alpha_s)^2 - \beta_s^2)$$

dove $k_1 + \cdots + k_r + 2h_1 + \cdots + 2h_s = n$. Quindi la funzione razionale si può decomporre nella forma

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{B(x)} =& \frac{a_{11}}{(x-x_1)} + \cdots + \frac{a_{1k_1}}{(x-x_s)^{k_1}} + \dots \\ &+ \cdots + \frac{a_{r1}}{(x-x_r)} + \cdots + \frac{a_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}} + \dots \\ &+ \cdots + \frac{p_{11}x + q_{11}}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \cdots + \frac{p_{1h_1}x + q_{1h_1}}{((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{h_1}} + \dots \\ &+ \cdots + \frac{p_{s1}x + q_{s1}}{(x-\alpha_s)^2 + \beta_s^2} + \cdots + \frac{p_{sh_s}x + q_{sh_s}}{((x-\alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{h_s}} + \dots\end{aligned}$$

dove $a_{ij}.p_{ij}, q_{ij}$ sono numei reali da determinare. Moltiplicando ambo i membri per $B(x)$ si ottiene un'uguaglianza tra i polinomi. Uguagliando i rispettivi corfficienti otteniamo un sistema lineare che è sempre risolubile e che fornisce gli n numeri cercati.

Passo IV A questo punto per calcolare una primitiva di f basta saper calcolare, per ogni $a, p, q, x_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, le primitive

$$\int \frac{a}{(x-x_0)^r}dx \quad \text{e} \quad \int \frac{px+q}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^r}dx$$

Il primo integrale indefinito è elementare

$$\int \frac{a}{(x-x_0)^r} = \begin{cases} a\ln|x-x_0| + c, & \text{se } r = 1; \\ a\frac{(x-x_0)^{1-r}}{1-r} + c, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

Per il calcolo del secondo integrale indefinito abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{px+q}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^r}dx &\overset{x=\alpha+\beta t}{=} \int \frac{p(\alpha+\beta t)+q}{\beta^{2r}(1+t^2)^r}\beta dt \\ &= \frac{p}{\beta^{2r-2}}\int \frac{t}{(1+t^2)^r}dt + \frac{p\alpha+q}{\beta^{2r-1}}\int \frac{1}{(1+t^2)^r}dt\end{aligned}$$

Si è usato $dx = \beta dt$.

Si vede facilmente che

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^r}dt = \begin{cases} \frac{\ln(1+t^2)}{2} + c, & \text{se r=1;} \\ \frac{(1+t^2)^{1-r}}{2(1-r)} + c, & \text{se r>1 .} \end{cases}$$

Si è usato $\int \frac{f'(t)}{f(t)^n}dt = \frac{1}{(1-n)f(t)^{n-1}}$ per $n > 1$.

Mentre per calcolare $\int \frac{dt}{(1+t^2)^r}$ si ponga

$$\frac{dt}{(1+t^2)^r} = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left\{\frac{b_{2r-3}t^{2r-3} + b_{2r-4}t^{2r-4} + \cdots + b_0}{(1+t^2)^{r-1}}\right\}$$

Uguagliando e moltiplicando ambo i membri per $(1+t^2)^r$ otteniamo

$$(a_0 + a_1 t)(1+t^2)^{r-1} + ((2r-3)b_{2r-3}t^{2r-4} + \cdots + b_1)(1+t^2) - 2t(r-1)(b_{2r-3}t^{2r-3} + \cdots + b_0) = 1$$

Dall'uguaglianza dei polinomi si ottengono $2r$ equazioni in $2r$ incognite. Da qui si ricavano a_i e b_i (non verifichiamo la risolubilità del sistema). Si osservi che sicuramente $a_1 = 0$ in quanto è il coefficiente di t^{2r-1}. Sicché, si ottiene

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^r} = a_0 \arctan t + \frac{b_{2r-1}t^{2r-1} + b_{2r-2}t^{2r-2} + \cdots + b_0}{(1+t^2)^{r-1}} + c$$

Naturalmente vi saranno altri coefficienti che si annulleranno ma non ci addentriamo nei conti che poi verranno fatti di volta in volta.

A questo punto risostituendo t con $\frac{x-\alpha}{\beta}$ si ottiene la primitiva voluta.

Esempio 1.1. Calcoliamo

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

Da quanto detto sopra scriviamo

$$\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2} + \frac{d}{dt}\left\{\frac{b_1 t + b_0}{1+t^2}\right\}$$

sicché moltiplicando ambo i membri per $(1+t^2)^2$ si ottiene

$$\begin{aligned} 1 =&(a_0 + a_1 t)(1+t^2) + b_1(1+t^2) - 2t(b_1 t + b_0) \\ =&a_1 t^3 + (a_0 - b_1)t^2 + (a_1 - 2b_0)t + a_0 + b_1 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 - b_1 = 0 \\ a_1 - 2b_0 = 0 \\ a_0 + b_1 = 1 \end{cases}$$

Sicché

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\arctan t}{2} + \frac{t}{2(1+t^2)} + c$$

Esempio 1.2 (funzione derivabile non C^1)**.** Una funzione derivabile si dice C^1 se la sua derivata è continua. Diamo ora un esempio di una funzione derivabile non C^1. Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$$

mentre per $x = 0$ si ha

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

Ma $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.