X ESERCITAZIONE DI AM1B

Nella seguente lezione ci occuperemo dello studio di una funzione.

1. Studio di una funzione

Per disegnare in un piano cartesiano il grafico di una funzione $y = f(x)$ è oppurtuno seguire lo schema indicato di seguito.

Dominio. Si determina il *dominio*, o *insieme di definizione* I della funzione $f(x)$.

Simmetria. Si esamina se $f(x)$ gode di proprietà di simmetria:ad esempio, si vede se

$f(x)$ è pari , cioè $f(x) = f(-x), \forall \ x \in I$

$f(x)$ è dispari, cioè $f(x) = -f(x), \forall \ x \in I$

$f(x)$ è periodica di periodo T, cioè $f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in I$

In tal caso si può restringere l'insieme dove studiare la funzione. Se f è pari o dispari basta studiare $f(x)$ su $x \geq 0$ e poi disegnare per simmetria il grafico su tutto I. Mentre se la funzione è di periodo T è sufficiente restringerci ad un intervallo di lunghezza T.

Studio del segno. Si determina, quando possibile, ove $f(x) = 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$. Osserviamo comunque che, spesso, ciò puo essere molto complicato e non effettuabile con metodi elementari.

Asintoti. Si determinano gli eventuali asintoti (orizzontali, obliqui e verticali). Questi si trovano nel seguente modo: se esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ allora $x = x_0$ è detto *asintoto vericale*. Se I è un insieme illimato, ad esempio superiormente, si calcoli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Se il limite esiste finito ed è m allora si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

Se anche quest'ultimo è finito ed uguale a q allora la retta $y = mx + q$ è detta *asintoto obliquo* se $m \neq 0$, altrimenti è detta *asintoto orizzontale*. Se I è illimitato inferiormente si fa lo stesso lavoro per $x \to -\infty$.

Continuità e derivabilità. Si determinano i punti di I ove f risulta non continua o dove non è derivabile.

Crescenza e decrescenza Si calcola, quando esiste, la derivata prima e si stabilisce per quali valori di x risulta $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$. In base ciò si determinano gli intervalli in cui la funzione risulta crescente o decrescente ed i punti di massimo e minimo.

Convessità Si calcola la derivata secinda, se possibile, e si determinano i valori di x per cui risulta $f''(x) =$, $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ In base ciò si detrminano gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa e gli eventuali punti di flesso.

Esempio 1.1. Studiamo la funzione $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
DOMINIO. Il dominio di $f(x)$ è $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$.
STUDIO DEL SEGNO. Si ha $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Mentre $f(x) = 0$ se $x = 0$.
ASINTOTI. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

Quindi $x = 1$ è un asintoto verticale. Mentre

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

e

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{x-1} = 0$$

Sicché $y = x$ è un asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.
CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ. $f(x)$ è continua e derivabile per ogni x nel dominio in quanto composizione di funzioni con queste proprietà.
CRESCENZA E DECRESCENZA Calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

E si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < 0$ e $x > 2$. E $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $x = 2$. Quindi $f(x)$ è crescente per $x \leq 0$ e $x \geq 2$ mentre è decrescente per $0 \leq x \leq 1$ e $1 \leq x \leq 2$. E quindi il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = 1$ è un punto di minimo relativo.
CONVESSITÀ. Derivando nuovamente si ottiene

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

La derivata è quindi mai nulla. Perciò f non ha flessi. La derivata seconda è positiva se e solo se $x > 1$. Quindi f è convessa in $x > 1$ e concava se $x < 1$.

Esempio 1.2. Studiamo la funzione $\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}}$.
DOMINIO.$f(x)$ è definita su $\{x \in \mathbb{R} | \frac{x^2(x-1)}{x+1} \geq 0\} \cap \{x \neq -1\}$ e cioè su $\{x < -1\} \cup \{0\} \cup \{x \geq 1\}$.
STUDIO DEL SEGNO. La funzione è chiaramente sempre positiva e si annulla per $x = 0$ e $x = 1$.
ASINTOTI. Si ha $\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \mp\infty$ e quindi $x = -1$ è un asintoto verticale. Per l'asintoto obliquo si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \pm\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x^2(x+1)}} = \pm 1$$

Calcoliamo ora il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \mp x &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2(x-1)}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^2(x-1)}{x+1}} \pm x} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{-2x^2}{x+1}}{|x|(\sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}} + 1)} = \mp 1\end{aligned}$$

Perciò la retta $y = x - 1$ è un asintoto obliquo per $x \to \infty$ mentre $y = 1 - x$ lo è per $x \to -\infty$.
CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ. $f(x)$ è derivabile in ogni x del dominio tranne che in $x = 0$ (che non è punto di accumulazione del dominio) e $x = 1$, dove la derivata non è finita (Verificare). Quindi in $x = 1$ il grafico ha tangente verticale.
CRESCENZA E DECRESCENZA Nei punti dove f è derivabile si ha

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{x+1}(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2(x-1)}(x+1)^2} = \frac{x}{|x|}\,\frac{\sqrt{x+1}(x^2+x-1)}{\sqrt{x-1}(x+1)^2}$$

Sicché

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

(Si osservi che l'altra radice del polinomio x^2+x-1, cioè $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, non appartiene al dominio di f. E si ha

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < -1 \text{ e } \ x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Longleftrightarrow \ x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

E quindi $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo.
Non studiamo la derivata seconda in quanto lo studio del suo segno risulta difficoltoso.