XI ESERCITAZIONE DI AM1B

Nella prima parte della lezione affrontiamo alcuni esercizi riguardanti il Teorema di de L'Hopital cercando di mettere in risalto l'importanza delle ipotesi del suddetto Teorema. Poi svolgeremo esercizi sul calcolo di limiti utilizzabdo svilupppi di Taylor. Infine svolgeremo alcuni esercizi su integrali impropri e massimi e minimi.

1. Esercizi su limiti con de L'Hopital

Ricordiamo il teorema di de L'Hopital

Teorema 1.1. *Sia I un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) ed f e g funzioni derivabili in $I \setminus \{x_0\}$. Supponiamo che*

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} = 0(\pm\infty)$
b) $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I \setminus \{x_0\}$
c) *esiste* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A volte il precedente teorema viene utilizzato in modo improprio cioè anche in situazioni in cui le ipotesi non sono verificate. Facciamo ora vedere l'importanza delle ipotesi.

Ipotesi a) Si consideri

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x}{x-1}$$

Questo limite vale $\frac{x_0}{x_0-1} \neq 1$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Mentre se si applicasse de L'Hopital si avrebbe 1 com limite. Si noti che quest'ultimo è il limite corretto nel caso $x_0 = \pm\infty$. Ciò avviene perché in tal caso le ipotesi del teorema sono soddisfatte in quanto il limite considerato è una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Un altro esempio in cui se non vale l'ipotesi *a*) allora la tesi è falsa è il seguente

$$\lim_{0^+} \frac{\ln x}{x}$$

Il limite è, infatti, $-\infty$. Mentre applicando de L'Hopital si avrebbe $+\infty$. (Si faccia tutte le verifiche).

Ipotesi b) L'ipotesi b) ci assicura l'esistenza della funzione $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $I/\{x_0\}$. Mostriamo ora che in realtà questa ipotesi ci assicura anche l'esistenza della funzione $\frac{f(x)}{g(x)}$ in $I'/\{x_0\}$ con $x_0 \in I' \subseteq I$. Studiamo due differenti casi

i) Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. In tal caso esisterà chiaramente un intorno di x_0 in cui $g(x) \neq 0$. Sicché si ha la tesi.

ii) Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Consideriamo allora la funzione $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$ così definita

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

La funzione $\tilde{g}$ non è altro che il prolungamento per continuità di g.

Si supponga esista $x_1 \in I/\{x_0\}$ tale che $g(x_1) = 0$. Allora la funzione $\tilde{g}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle poiché $\tilde{g}(x_0) = \tilde{g}(x_1) = 0$ e quindi esiste $x_2 \in I$ tale che $\tilde{g}'(x_2) = g'(x_2) = 0$ in contraddizione con le ipotesi.

Ipotesi c) Puo accadere che il limite del rapporto delle derivate non esista mentre esiste il limite cercato. Ad esempio si consideri

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

Tale limite è chiaramente 1. Se si applica de L'Hopital si ottiene, derivando numeratore e denominatore

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \cos x$$

che non esiste.

Svolgiamo ora qualche esercizio.

Esempio 1.2. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3}$$

Questa è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Le ipotesi a) e b) sono verificate. Derivando numeratore e denominatore si ottiene

$$\frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2}$$

e si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

Sicché per il Teorema di de L'Hopital si ha che il limite cercato è $\frac{2}{3}$.

Esempio 1.3. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sqrt{1 + x^2})}{1 - \cos x}$$

Innanzitutto notiamo che per note proprietà del logaritmo il precedente limite è equivalente a

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \cos x}$$

Tale limite è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ e l'ipotesi b) è chiaramente verificata. Il rapporto delle derivate è

$$\frac{x}{1 + x^2}\frac{1}{\sin x}$$

e si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1 + x^2}\frac{1}{\sin x} = 1$$

e quindi, essendo verificata l'ipotesi c),

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\ln(1 + x^2)}{1 - \cos x} = 1$$

Osserviamo che questo limite era possibile calcolarlo in modo semplice, utilizzando i limiti notevoli.(Provare!)

Esempio 1.4. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x})(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x})$$
Con facili calcoli il precedente limite è equivalente a calcolare
$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$
che è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Calcoliamo il rapporto delle derivate. Si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x - 2x}{2x\sin^2 x + 2x^2\sin x\cos x}$$
che è di nuovo una forma indeterminata. Derivando nuovamente si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2}{2\sin^2 x + 8x\sin x\cos x + 2x^2\cos^2 x - 2x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\sin^2 x}{2\sin^2 x + 6x\sin x\cos x + x^2(\cos 2x)}$$
Dividendo e moltiplicando numeratore per x^2 ed utilizzando ripetutamente il limite niotevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ si ottiene che questo limite è $-\frac{1}{3}$ e quindi per il Teorema di de L'Hopital anche il limite richiesto è $-\frac{1}{3}$.

2. Calcolo di Limiti con lo sviluppo di Taylor

Ricordiamo gli sviluppi di Taylor di alcune funzione elementari in $x = 0$.
$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

Ricordiamo che se g è una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $o(g;x_0)$ è una funzione, detta o piccolo di g, tale che
$$\lim_{x\to x_0}\frac{o(g;x_0)}{g} = 0$$
Quando x_0 è chiaro dal contesto (nei casi precedenti si ha $x_0 = 0$) si scrive semplicemente $o(g)$. Scriviamo alcune peoprietà degli o piccoli. Siano f e g funzioni infinitesimali per $x \to x_0$ ed $a \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}
&o(f) \pm o(f) = o(f)\\
&ao(f) = o(af) = o(f)\\
&fo(g) = o(fg)\\
&o(f)o(g) = o(fg)\\
&o(o(f)) = o(f)\\
&o(f + o(f)) = o(f)
\end{aligned}$$
Ne proviamo solo alcune. Le altre le lasciamo come utile esercizio.

$fo(g) = o(fg)$ perché
$$\lim_{x\to x_0} \frac{fo(g)}{fg} = \lim_{x\to x_0} \frac{o(g)}{g} = 0$$
$o(o(f)) = o(f)$ perché
$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(o(f))}{f} = \lim_{x\to x_0} \frac{o(o(f))}{o(f)} \frac{o(f)}{f} = 0$$
$o(f + o(f)) = o(f)$ perché
$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(f+o(f))}{f} = \lim_{x\to x_0} \frac{0(f+o(f))}{f+o(f)} \frac{f+o(f)}{f} = 0$$
poiché
$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(f+o(f))}{f+o(f)} = 0$$
e
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f+o(f)}{f} = 1$$
Nel calcolo dei limiti è spesso utile sostituire le funzioni con il loro sviluppo nel punto dove si calcola il limite.

Esempio 2.1. Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0^+} [(1 - \frac{1}{\ln x})^{-\ln x} - (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}] \ln \frac{1-\cos x}{\sin x}$$
Facciamo lo sviluppo di taylor in 0 delle varie funzioni in gioco.
$$\begin{aligned}
(1 - \frac{1}{\ln x})^{-\ln x} =& e^{-\ln x \ln(1-\frac{1}{\ln x})} \\
=& e^{-\ln x(-\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2\ln^2 x} + o(\frac{1}{\ln^2 x}))} \\
=& e^{1+\frac{1}{2\ln x} + o(\frac{1}{\ln x})} \\
=& e(1 + \frac{1}{2\ln x} + o(\frac{1}{\ln x})) \\
=& e(1 + \frac{1}{2\ln x}) + o(\frac{1}{\ln x})
\end{aligned}$$
Inoltre
$$\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} =& e^{\frac{\ln(1+x)}{\sin x}} \\
=& e^{\frac{x - x^2/2 + o(x^2)}{x + o(x^2)}} \\
=& e^{\frac{1 - x/2 + o(x)}{1 + o(x)}} \\
=& e^{1 - x/2 + o(x)} \\
=& e(1 - \frac{x}{2} + o(x)) \\
=& e(1 - \frac{x}{2}) + o(x)
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $\frac{f+o(g)}{1+o(x)} = f + o(g)$, se f è limitata in 0. Infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{f+o(g)}{1+o(g)} - f}{g} = \lim_{x\to 0^+} \frac{o(g)(1-f)}{g(1+o(g))} = 0$$

In definitiva dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} [e(\frac{1}{2\ln x} + \frac{x}{2}) + o(\frac{1}{\ln x}) + o(x)](\ln \frac{1-\cos x}{\sin x})$$

Osserviamo che $\frac{ex}{2} + o(x)$ è un $o(\frac{1}{\ln x})$, perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{ex}{2} + o(x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{ex \ln x}{2} + \ln x o(x) = 0$$

Sicché siamo ridotti a calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e}{2}[\frac{\ln(\frac{1-\cos x}{\sin x})}{\ln x}]$$

E' una forma indeterminata. Il rapporto delle derivate è

$$\frac{e\frac{\sin x}{1-\cos x}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{2}{x}} = \frac{ex}{2\sin x}$$

che ha limite $\frac{e}{2}$. Sicché il limite cercato è $\frac{e}{2}$.

3. Integrali impropri

In questa sezione svolgiamo alcuni esercizi sugli integrali impropri.

Esempio 3.1. Studiamo il seguente integrale

$$\int_1^\infty e^{-x^2}$$

Si osservi che $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ per $x \geq 1$. Sicché si ha

$$\int_1^\infty e^{-x^2} \leq \int_1^\infty e^{-x} = -e^{-x}|_1^\infty = \frac{1}{e}$$

Esempio 3.2. Calcoliamo il seguente integrale

$$\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2}$$

In modo ingenuo si potrebbe concludere così

$$\int_{-3}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}|_{-3}^1 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

Tale risultato è chiaramente sbagliato:si osservi che $\frac{1}{x^2} > 0$ mentre l'integrale trovato è negativo. L'errore si trova nel fatto che $\frac{1}{x^2}$ non è definito in $x = 0$ e quindi si tratta di un integrale improprio e pertanto si deve scomporre in

$$\int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2} + \int^1 \frac{dx}{x^2}$$

che non è integrabile.

4. Massimi e minimi

Svolgiamo infine alcuni esercizi su massimi e minimi.

Esempio 4.1. Tra tutti i rettangoli qual'é quello che, fissata l'area A, ha perimetro minore?

Si indichino con x e y i lati di un generico rettangolo. Quindi si ha

$$A = xy$$
$$p = x + y$$

dove p è il semiperimetro. Quindi si ha

$$y = \frac{A}{x}$$
$$p = x + \frac{A}{x}$$

Studiamo $p(x)$. La sua derivata è

$$p'(x) = 1 - \frac{A}{a^2}$$

Sicché

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{A}$$

Inoltre tale punto è un minimo come si verifica facilmente (tramite studio del segno della derivata prima o tramite derivata seconda) In tal caso si ha $y = \sqrt{A}$ e perciò il rettangolo u quadrato.

Esempio 4.2. Provare che per $x > 0$

$$\ln x \leq x - 1$$

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \ln x + 1 - x$$

Si ha $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ e quest'ultima si annulla se e solo se $x = 1$. Inoltre $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$ e perciò $f''(1) = -1 < 0$ e cioè $x = 0$ è un punto di massimo. Il valore che la funzione assume in tale punto è 0 e ciò prova che $f(x) \leq 0$ per ogni $x > 0$ come volevasi dimostrare.