ESERCITAZIONE XII

Nella presente ed ultima lezione svolgeremo esercizi di vario tipo.

1. Esercizi

Esempio 1.1. Studiare la funzione

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

Studio del segno: in $x > 0$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$
$$f(1) = 0$$

Asintoti: Poiché $\lim_{x\to\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt = +\infty \tag{1}$$

e quindi non esiste asintoto orizzontale.

L'asintoto verticale è la retta $x = 0$ in quanto, poiché $\frac{1}{x}$ non integrabile in 0, si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_1^0 \frac{e^t}{t} dt = -\lim_{x\to 0} \int_0^1 \frac{e^t}{t} = -\infty$$

Il limite obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^t}{t} dt}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \to +\infty$$

dove nell'ultimo passaggio si utilizzato de L'Hopital (si osservi che per (1) si ha una fiorma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Continuità e derivabiltà La funzione ammette derivate di ogni ordine.

Massimi e Minimi:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} > 0 \ \forall x$$

Quindi f è una funzione crescente.

Convessità

$$f''(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Inoltre $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Sicché si ha che f è concava per $x < 1$ e convessa per $x > 1$. In $x = 1$ ha un punto di flesso con tangente data dalla retta

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

e cioè

$$y = e(x-1)$$

Esempio 1.2. Determinare quante soluzioni reali ha l'equazione

$$x^3 - 2x + 5 = 0$$

Poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora, per il teorema degli zeri, esiste almeno una soluzione l.

$f'(x) = 3x^2 - 2$ e dunque $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Inoltre $f''(x) = 6x$ e quindi $f''(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -6\sqrt{\frac{2}{3}} < 0$ e $f''(\sqrt{\frac{2}{3}}) = 6\sqrt{\frac{2}{3}} > 0$. Sicché in $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ si un punto di massimo ed in $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ si ha un punto di minimo.

Si ha che i valori assunti nei due punti sono

$$f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 5 \geq 0$$

$$f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} + 5 = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + 5 \geq 0$$

Da un semplice studio del grafico si vede che quindi la soluzione è unica.

Inoltre $f(-3) = -16 < 0$ e $f(-2) = 1 > 0$. Quindi per il teorema di esistenza degli zeri si ha che la soluzione è nell'intervallo $(-3, -2)$. Da cui si ricava che la soluzione è compresa in $(-3, -2)$.

Esempio 1.3. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo della seguente funzione

$$y = \frac{x^2}{10} + 10 - |\ln x| \quad \forall x \in (0, 2)$$

Osserviamo che la funzione è derivabile per ogni $x \neq 1$. Se $x > 1$, allora

$$y = \frac{x^2}{10} + 10 - \ln x$$

e dunque $y' = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$. Allora $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm + \sqrt{5}$ ma queste soluzioni non sono accettabili. Dunque $y' < 0$ in $(1, 2)$.

Sia ora $x < 1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{10} + 10 + \ln x$.

$$y' = \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \Rightarrow y' > 0 \ \forall x \in (0, 1)$$

Il punto di massimo è dunque $M = (1, \frac{101}{10})$.

Mentre non esiste il minimo assoluto ma l'estremo inferiore è $-\infty$.

Esempio 1.4.

$$\int \log(x + \sqrt{1+x^2})dx = x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx =$$

$$x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}})dx =$$

$$x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

Poniamo $1 + x^2 = y$ e dunque $dy = 2xdx$. Allora l'integrale diventa

$$x\log(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} =$$

$$x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+c.$$

Esempio 1.5.

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\arctan^2 x-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$$

da cui segue

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{\arctan^2 x}{2}+c$$

Esempio 1.6. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sqrt{x}}-\sin^3\sqrt{x}-\cos x^{\frac{5}{4}}}{x^2\sqrt{x}}$$

Consideriamo gli sviluppi in $t=0$ delle unzioni elementari in gioco

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

Per $t=x\sqrt{x}$ si ottiene

$$e^{x\sqrt{x}}=1+x\sqrt{x}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+o(t^4)$$

Per $t=\sqrt{x}$ si ha

$$\sin\sqrt{x}=\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{6}+o(x)\Rightarrow\sin^3\sqrt{x}=x\sqrt{x}-\frac{x^2\sqrt{x}}{2}+o(x^3)$$

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)$$

Per $t=x^{\frac{5}{4}}$

$$\cos(x^{\frac{5}{4}})=1-\frac{x^2\sqrt{x}}{2}+o(x^{3+\frac{3}{4}})$$

Sicché calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sqrt{x}+\frac{x^3}{2}-x\sqrt{x}+\frac{x^2\sqrt{x}}{2}-1+\frac{x^2\sqrt{x}}{2}+o(x^3)}{x^2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt{x}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2\sqrt{x}}=1$$

Esempio 1.7 (funzione integrabile non assolutamente integrabile)**.** Si consideri

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}$$

Esso è integrabile, infatti

$$\int_1^c\frac{\sin x}{x}=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^c-\int_1^c\frac{\cos x}{x^2}$$

Si osservi ora che

$$\frac{|\cos x|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$$

e quindi esiste l'integrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}$$

ne segue che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$$

Proviamo ora che

$$\frac{|\sin x|}{x}$$

non è integrabile in $(+1, \infty)$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ consideriamo

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}$$

Risulta

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x| = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

e dunque

$$\lim_{c \to \infty} \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} \geq \int_{2\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = +\infty$$