SOLUZIONI 5

Di Gregorio Laura

(1) Siano $z_1 := (1 + i\sqrt{3})/2$ e $z_2 := (1 - i\sqrt{3})/2$ i punti in cui la regione ha un angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. Si trovi prima una lineare fratta che manda $z_1 \to 0$, $z_2 \to \infty$, $\frac{1}{2} \to 1$. Si consideri poi la trasformazione $z \mapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}}$. Dopo queste due trasformazioni conformi la regione è divenuta il semipiano $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

(2) Siano $z_1 := (1 + i\sqrt{3})/2$ e $z_2 := (1 - i\sqrt{3})/2$ i punti in cui la regione ha un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Si trovi prima una lineare fratta T che manda $z_1 \to 0$, $z_2 \to \infty$, $-\frac{1}{2} \to 1$. Si considerino poi le trasformazioni $z \mapsto z/T(0)$ e $z \mapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}}$. Dopo queste tre trasformazioni conformi la regione è divenuta il semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

(3) Siano $z_1 := \sqrt{1 - a^2} + ia$ e $z_2 := -\sqrt{1 - a^2} + ia$ i punti in cui la regione ha un angolo $\alpha = \arccos a$. Si trovi prima una lineare fratta che manda $z_1 \to \infty$, $z_2 \to 0$, $ia \to 1$. Si consideri poi la trasformazione $z \mapsto z^{\frac{\pi}{\alpha}}$. Dopo queste due trasformazioni conformi la regione è divenuta il semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

(4) Si consideri la lineare fratta $Tz := 2\pi iz/(z - 2)$ che manda $0 \to 0$, $2 \to \infty$, $-2 \to i\pi$. Dopo questa trasformazione conforme la regione è divenuta la striscia $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Tramite la mappa esponenziale $z \to e^z$ la regione diventa il semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

(5) La mappa $Tz := \frac{1-iz}{z-i}$ manda $-1 \to -1$, $1 \to 1$, $i \to \infty$ e anche $-i \to \infty$. La regione diventa la semistriscia $\{-1 < \operatorname{Re} z < 1\,,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Tramite la mappa $\tilde{T} := \frac{\pi i}{2}(z + 1)$ si mappa tutto nella semistriscia $\{0 < \operatorname{Im} z < i\pi\,,\ \operatorname{Re} z < 0\}$. Tramite la mappa esponenziale $z \to e^z$ la regione diventa il semidisco $\{|z| < 1\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Si trovi quindi una lineare fratta che manda $1 \to \infty$, $-1 \to 0$, $0 \to 1$. La regione diventa il quadrante $\{\operatorname{Im} z > 0\,,\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Infine tramite la mappa $z \mapsto z^2$ la regione diventa il semipiano $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.