SOLUZIONI 3

Di Gregorio Laura

Esercizio 1.

(a) Ω_1^c. Infatti se $z \in \Omega_1^c$ allora $\Omega_1 \setminus \{z\} = \Omega_1$ che è semplicemente connesso. Se invece $z \in \Omega_1$ allora, per $r > 0$ sufficientemente piccolo, $\gamma := \partial D_r(z) \subset \Omega_1$ ha indice $1 \neq 0$.

(b) NO: per esempio $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus \{z = x,\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$ e $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus \{z = x,\ x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$; allora $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) SI: infatti sia $z \in (\Omega_1 \cap \Omega_2)^c$ e γ cammino chiuso in $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Verifichiamo che $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$. Esiste $j \in \{1, 2\}$ tale che $z \in \Omega_j^c$. Essendo Ω_j semplicemente connesso $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.

Esercizio 2.

È equivalente dimostrare che

(i) $C \subset \Omega \implies \Omega \setminus C$ non semplicemente connesso,

(ii) $C \cap \Omega \neq \emptyset \implies \Omega \setminus C$ semplicemente connesso.

Dimostrazione.

(i) Consideriamo Ω^* e C. Sono entrambi chiusi rispetto alla sfera di Riemann e $\Omega^* \cap C = \emptyset$. Dunque $(\Omega \setminus C)^* = \Omega^* \cup C$ si scrive come unione disgiunta di due chiusi e dunque non è connesso.

(ii) Facciamo vedere che $(\Omega \setminus C)^*$ è connesso per archi, ovvero dati $z_1, z_2 \in (\Omega \setminus C)^*$, esiste $\gamma \subset (\Omega \setminus C)^*$, continua, che li unisce. Caso (a) $z_1, z_2 \in \Omega^*$: essendo Ω semplic. connesso Ω^* è connesso. Caso (b) $z_1, z_2 \in C$: C è connesso per ipotesi. Caso (c) $z_1 \in C, z_2 \in \Omega^*$. Sia $z_3 \in \Omega \cap C$. Essendo C connesso esiste γ_1 che unisce z_1 e z_3. Analogamente esiste $\gamma_2 \subset \Omega$ che unisce z_3 e z_2. Considero $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Esercizio 3.

Sia $r > 0$. Per assurdo se K fosse limitato $K \subset D_r(0)$ (aperto nella sfera di Riemann) e $\{\infty\} \subset \{|z| > 2r, \infty\}$(aperto nella sfera di Riemann) dunque $K \cup \{\infty\} = (\mathbb{C} \setminus K)^*$ sarebbe sconnesso (perché ho trovato due aperti disgiunti che lo ricoprono e che lo intersecano). Contraddizione: $\mathbb{C} \setminus K$ non sarebbe semplicemente connesso!

Esercizio 4.

Sia z_0 il punto rispetto al quale Ω è stellato. Voglio dimostrare che $\forall\, w \notin \Omega\ \forall \gamma \subset \Omega$ cammino chiuso $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 0$. Sia $w \notin \Omega$. Osserviamo che la semiretta σ che parte da w nella direzione opposta a z_0 non incontra Ω. Allora σ appartiene alla componente connessa illimitata di γ^c e dunque anche w appartiene alla componente connessa illimitata di γ. Segue che $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 0$.

Esercizio 5.

Sia $z_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Osserviamo che $\Omega_1 \cup \Omega_2$ è stellato rispetto a z_0 (se $z \in \Omega_1$ allora $[z_0, z] \subset \Omega_1 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, analogamente per $z \in \Omega_2$). Dall'esercizio precedente segue che $\Omega_1 \cup \Omega_2$ è semplicemente connesso.