

AC1 Primo esonero

12 aprile 2005

1. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)} .$$

2. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\vartheta}{2 - \cos \vartheta} d\vartheta .$$

3. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 1} dx .$$

4. Siano $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe, g non costante, verificanti

$$(g \circ f) \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ .$$

Mostrare che se g è un polinomio allora f deve essere costante. Vale lo stessa conclusione se g è qualsiasi (sempre olomorfa non costante)?

5. Sia $f(z) := \sin \frac{1}{z}$.

(i) Discutere la natura della singolarità di f in 0

(ii) Mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $f(D'_\varepsilon(0)) = \mathbb{C}$
(si ricordi che $D'_\varepsilon(0) := \{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } 0 < |z| < \varepsilon\}$).