Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini -
Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato straordinario del 7/4/2004

1. Sia X uno spazio metrico; $\mathcal{T}$ la topologia indotta dalla metrica su X. Dimostrare il teorema di unicità del limite in X (cioè che il limite di una successione in X, se esiste, è unico).

2. Considerare la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{(-a, a) \times U / a \in \mathbb{R}, U \in \mathcal{T}_e\}$$

Dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

   (a) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base e sia detta $\mathcal{T}$ la topologia che induce.

   (b) Calcolare interno, esterno, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccc} \text{l'asse } x & \text{l'asse } y & \{(0,0)\} \\ \{(\pi, \sqrt{2})\} & D_1(0,2) & D_1(2,0) \\ \{(x,y)/y \geq |x|+1\} & \{(x,y)/x \in \mathbb{Z}\} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)/x^2+y^2=1\}. \end{array}$$

   I dischi sono intesi nel senso ususle, ma non necessariamente sono degli aperti con *questa* topologia.

   (c) Dimostrare che questa topologia è meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}^2$.

3. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazioni di *insiemi* e sia $\mathcal{T}$ una topologia su X. definiamo la famiglia di sottoinsiemi di Y

$$f_*(\mathcal{T}) := \left\{A \subseteq Y \ / \ f^{-1}(A) \in \mathcal{T}\right\}.$$

   (a) Dimostrare che $f_*(\mathcal{T})$ è una topologia su Y e che, prendendo su Y questa topologia, f è continua

   (b) Dimostrare che se $\mathcal{T}'$ è un'altra topologia su Y che rende f continua allora $f_*(\mathcal{T}) \succ \mathcal{T}'$

   (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta su X, $f_*(\mathcal{T})$ è la topologia discreta su Y.

   (d) Dimostrare che se f è un'applicazione costante, $f_*(\mathcal{T})$ è la topologia discreta su Y qualunque sia $\mathcal{T}$.

4. Sia Y l'insieme quoziente $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ e $p : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ la proiezione; si consideri su Y la topologia $p_*(\mathcal{T}_e)$. Si considerino la successione in $\mathbb{R}$ definita da $a_n := n + \frac{1}{n}$ e la corrispondente successione in Y data da $b_n := p(a_n)$.

(a) Verificare che la successione $\{a_n\}$ non ha limite in $\mathbb{R}$ mentre la successione $\{b_n\}$ ha un punto limite in Y.

(b) Dimostrare che $\mathbb{R}$ e Y non sono spazi topologici omeomorfi. *(Sugg.:vedi esercizio 4, tutorato n.4)*

(c) *(facoltativo)* Costruire una topologia analoga a quella euclidea per gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.