Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.9 del 11/5/2004

1. Sia $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R}$ con l'aggiunta di un'altro elemento $\mathbb{R} \cup \{\heartsuit\}$. Come topologia prendiamo la topologia cofinita su $\mathbb{R}$ a cui aggiungiamo solamente il sottoinsieme banale $\hat{\mathbb{R}}$. Dimostrare che lo spazio topologico risultante non è T1 ma per ogni coppia di punti è possibile trovare un intorno di *uno dei due* che non contenga l'altro. (questa proprietà va sotto il nome di T0)

2. Sia X uno spazio topologico di Haussdorf (T2). Dimostrare per X il teorema di unicità del limite.

3. Siano X, Y due spazi topologici e siano f e g due applicazioni continue da X a Y. Dimostrare che se Y è di Haussdorf l'insieme $A := \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di X.

4. Dimostrare che lo spazio topologico $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$ è separabile ma non è T1.

5. Sia X uno spazio topologico e A un suo sottoinsieme denso; sia ρ la relazine d'equivalenza che associa ogni punto a sé stesso e in più mette in relazione tra loro tutti i punti di A.
   (a) Dimostrare che $\frac{X}{\rho}$ non è T2.
   (b) Esiste un esempio in cui il quoziente $\frac{X}{\rho}$ è T1 ? Trovarlo o dimostrare che non esiste.

6. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}$ con la topologia j_d.
   (a) Stabilire se $(\mathbb{R}, j_d)$ è compatto.
   (b) Stabilire se i suoi sottoinsiemi di tipo $[a, b]$ (con la topologia indotta) sono compatti.
   (c) Dimostrare che se un sottospazio di $(\mathbb{R}, j_d)$ ha interno non vuoto non è compatto.