Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini -
Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.11 del 31/5/2004

1. Siano $Y := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ e $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, presi con la topologia euclidea, e sia $p : Y \to X$ l'applicazione che alla coppia (r, θ) associa il punto $(r\cos\theta, t\sin\theta)$.
   (a) Dimostrare che p è un rivestimento.
   (b) Trovare il sollevamento dell'arco $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, con $t \in [0,1]$, che ha per punto iniziale la coppia $(1, 8\pi)$.
   (c) Trovare tutti i sollevamenti dell'arco $t \mapsto (2t+1, 2\sqrt{3}t + \sqrt{3})$, con $t \in [0,1]$, al variare del punto iniziale nella fibra di $(1, \sqrt{3})$.
   (d) Verificare se p è anche un'identificazione.

2. Trovare un esempio di identificazione che non sia un rivestimento.

3. Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ è definita la relazione d'equivalenza
$$(x,y)\rho(x',y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z} \text{ e } y = y'.$$
Dimostrare che lo spazio quoziente è omeomorfo al prodotto $\mathbb{R} \times S^1$ e che la proiezione è un suo rivestimento.

4. Sia Y l'unione nel piano delle quattro circonferenze di raggio 1 e centro rispettivamente i punti $(0,-3)$,$(0,-1)$,$(0,1)$,$(0,3)$; sia X l'unione di due circonferenze tangenti.
   (a) Costruire un rivestimento $p : Y \to X$.
   (b) Dimostrare che non è possibile avere un rivestimento $p : Y \to X$ con un grado diverso da quello del rivestimento trovato.

5. Ogni rivestimento è anche un'identificazione? Dimostrare o dare un controesempio.