Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.10 del 25/5/2004

1. Dimostrare che l'immagine secondo un'applicazione continua di uno spazio topologico compatto è compatta.

2. Dimostrare che l'immagine secondo un'applicazione continua di uno spazio topologico connesso è connessa. Utilizzando questo fatto dimostrare che:

   (a) ogni quoziente di uno spazio topologico connesso è connesso;

   (b) il grafico in $\mathbb{R}^2$ di una funzione continua da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è connesso;

   (c) uno spaziotopologico connesso per archi è connesso.

3. Stabilire se i seguenti spazi topologici sono connessi, se sono connessi per archi e trovarne le componenti connesse:

   (a) $\mathbb{Q}$

   (b) $(\mathbb{R}, j_s)$

   (c) Un qualunque sottospazio finito di $(\mathbb{R}, i_d)$

   (d) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{conumerabile}})$

   (e) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

   (f) "la pulce e il pettine" il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ dato da

   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0,1)\}$$

4. Dimostrare che i seguenti spazi topologici sono a due a due non omeomorfi:

   (a) $\mathbb{R}$; S^1; $[a,b]$

   (b) $(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$; $[a,b]$

   (c) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$