Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore:Dott M. Nesci

Esercitazione del 26/05/2004

1.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico con cardinalita' infinita.
(i) Se $\mathcal{T} < K$ verificare che ogni sottinsieme S di X e' compatto rispetto a $\mathcal{T}$.
(ii) Se ogni sottinsieme di uno spazio topologico X e' compatto, allora X non e' T_2.

1.2 Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.
Dire se $[a, b]$ e' compatto rispetto alle seguenti topologie su $\mathbb{R}$:la cofinita, l'euclidea, j_s, i_s.

1.3 Verificare che se $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ e' una identificazione, la controimmagine di un compatto non e' in generale un compatto.

1.4 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Sia $\mathcal{T}_{cc} = \{V \in \mathcal{T}; X - V e' \mathcal{T} - compatto\}$.
Verificare che:
(i) $V \in \mathcal{T}_{cc}$,$U \in \mathcal{T}$, $V \subseteq U$, allora $U \in \mathcal{T}_{cc}$.
(ii) V_1, $V_2 \in \mathcal{T}_{cc}$, allora $V_1 \bigcap V_2 \in \mathcal{T}_{cc}$.
(iii) $\mathcal{T}_{cc} = \mathcal{T}$ se e solo se $(X, \mathcal{T})$ e' compatto.
(iv) Se $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, E)$ allora E_{cc} e' formata dagli aperti illimitati a destra e a sinistra.
(v) Se $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, i_s)$ allora $i_{s_{cc}} = \mathbb{R}$.

1.5 Sia $(X, \mathcal{T})$, uno spazio topologico. Denotiamo con ∞ un punto che non appartiene ad X, ma a uno spazio topologico piu' grande che contiene X, cioe' $X^* = X \bigcup \infty$, la chiusura di X con la topologia di Alexandrof definita nel modo seguente:

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \bigcup \{\infty \bigcup V, \forall V \in \mathcal{T}_{cc}\}.$$

Sia $i : X \to X^*$, l'inclusione, verificare che se $(X, \mathcal{T})$ non e' compatto allora $\{(X^*, \mathcal{T}^*), i\}$ e' una sua compattificazione.

1.6 Verificare $(X, \mathcal{T})$ e' connesso se e solo se ogni applicazione continua da X a uno spazio topologico discreto e' costante.

1.7 Sia $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ con topologia euclidea indotta.
(a) Verificare che Y e' connesso.
(b) Verificare che $Y - \{(0, 0)\}$ ha quattro componenti connesse.
(c) Dedurre da (b) che Y non e' omeomorfo alla retta euclidea

1.8 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, sia E un sottinsieme di X diverso dal vuoto. Verificare che se E e' connesso, aperto e chiuso in X, allora E e' una componente connessa.