Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Esercitazione del 5/05/2004

1.1 Sia F la seguente applicazione:

$$F : (\mathbb{R}, E) \to (S^1, E^2_{|S^1|})$$

tale che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = (cos 2\pi t, sen 2\pi t)$$

(i) Verificare che F e' una identificazione aperta.
(ii) Sia $f = F_{|[0,1]}$. Verificare che f e' una identificazione non aperta
(iii) Verificare che $h = F_{|[0,1)}$ non e' un'identificazione.

1.2 Sia $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Sia $(I^2, E^2_{|I})$, sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con topologia euclidea indotta. Sia ρ una relazione di equivalenza su I^2 :
$x \rho y$ se e solo se $x = y$ oppure $\exists t \in \mathbb{R}$ tale che $x = (0,t)$,$y = (1,t)$.
Verificare che il qoziente con la topologia indotta da ρ e' omeomorfo a $(S^1 \times I, E^3_{|S^1 \times I})$

1.3 Sia $(X, \mathcal{T}_X)$, sia $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$.
S introduce su X la seguente relazione di equivalenza:
$x \rho_S y$ se e solo se $x = y$, oppure $x, y \in S$.
Verificare che:
(i)
$\forall D \subseteq X$ risulta: $p^{-1}(p(D)) = D$ se $S \bigcap D = \emptyset$, $p^{-1}(p(D)) = D \bigcup S$ se $S \bigcap D \neq \emptyset$.
(ii)
Sia $(X, \mathcal{T}_X) = (\mathbb{R}, E)$. Determinare un sottinsieme S di $\mathbb{R}$ tale che:

$$p : (\mathbb{R}, E) \to (\mathbb{R}_{/\rho_S}, p_*(E))$$

non sia un'applicazione aperta.

1.4 Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico separabile verificante la seguente condizione: $\exists S \subseteq X$, S chiuso, $|S| > |\mathbb{N}|$, che ha come topologia indotta quella discreta.
Allora $(X, \mathcal{T})$ non e' T_4.