Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore:Dott. M. Nesci

Esercitazione del 24/3/2004

1.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico metrizzabile.
Dimostrare che $\forall S \subset X$, S sottinsieme,il suo derivato $D(S)$ e' un chiuso della topologia.

1.2 Sia $(\mathbb{R}^2, E)$, con E la topologia euclidea.
Sia S il seguente sottinsieme:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y > 0\}$$

Determinare :$Int(S)$, $Est(S)$, $Fr(S)$,$\overline{S}$,$D(S)$.

1.3 Sia $(X, \mathcal{T}_{cof})$ spazio topologico con la topologia cofinita e tale che $|X| = \infty$.
Sia $S \subset X$ tale che $|S| = \infty$ e $|X\S| = \infty$.
Determinare interno, esterno, frontiera e derivato di S.

1.4 Sia $(X, \mathcal{T})$ e $(X, \mathcal{T}^{'})$, con $\mathcal{T} < \mathcal{T}^{'}$.
Verificare che :
(1) $Int(S) \subseteq Int^{'}(S)$
(2) $Est(S) \subseteq Est^{'}(S)$
(3) $Fr^{'}(S) \subseteq Fr(S)$
(4) $\overline{S}^{'} \subseteq \overline{S}$

1.5 Sia $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, con

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - L, \forall L \in H\}$$

dove

$$H = \{\bigcup^{finite} E\}$$

con E sottospazi euclidei del piano.
Sia C la curva $x^2 + y^2 = 1$.
Determinare interno esterno, frontiera, chiusura e derivato di C.

1.6 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico separabile.
Siano su X due topologie $\mathcal{T}^{'}$ e $\mathcal{T}''$ tali che:

$$\mathcal{T}^{'} < \mathcal{T} < \mathcal{T}^{''}$$

(i) Dimostrare che $(X, \mathcal{T}^{'})$ e' separabile.
(ii) Verificare con un esempio che $(X, \mathcal{T}^{''})$ puo' non essere separabile.

1.7 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.
Dimostrare che $\mathcal{T}$ e' la topologia discreta su X se e solo se comunque prendo un sottinsieme proprio di X il suo derivato e' vuoto.

1.8 Sia $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{T})$, dove $\mathcal{T}$ e' la topologia che ha come sottobase $S = \{[0, n) \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.
Determinare $D(\{\frac{1}{2}\})$.