Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Esercitazione del 3/3/2004

1.1 (X, d), spazio metrico.
Definiamo su X un'altra distanza:

$$\overline{d(x,y)} = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Dimostrare che d e $\overline{d}$ sono distanze topologicamente equivalenti.

1.2 Sia f la seguente applicazione:

$$(X, d) \to (\mathbb{R}, e)$$

dove d e' una metrica qualsiasi su X, mentre e e' la metrica euclidea su $\mathbb{R}$.Dimostrare che f e' continua su X.

1.3 Sia (X, d) uno spazio metrico finito con d una metrica qualsiasi.
Dimostrare che d e' topologicamente equivalente alla metrica discreta.

1.4 Siano d_1 e d_2 distanze su uno stesso spazio X che inducono metriche topologicamente equivalenti.
Dimostrare che la sequente applicazione e' un omeomorfismo:

$$(X, d_1) \to_{id} (X, d_2)$$

1.6 Dimostrare che la seguente applicazione lineare:

$$L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

e' continua.

1.7 Verificare quali fra i seguenti insiemi di $(\mathbb{R}^n, e)$,con e la metrica euclidea, sono limitati e quali non lo sono:
(1) $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $x_n > 0$
(2) $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $x_n = 0$
(3) $x \in \mathbb{R}^n$ t.c.$|x_i| < 1, \forall i = 1, \cdots, n$

1.8 Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $Y \subset X$, un suo sottinsieme, sia d_y la metrica indotta su Y.
Dimostrare che:
(i) Ogni disco D^y di (Y, d_y) e' del tipo $D \bigcap Y$ con D un opportuno disco di (X, d) avente centro $y \in Y$
(ii) Se D e' un disco di (X, d), allora D e' un aperto di (Y, d_y)
(iii) Sia V un sottinsieme di Y. Dimostrare che V e' un aperto in Y se e solo se esiste un aperto U di X tc $U \bigcap Y = V$.