UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 15-7-2004 - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano le nozioni di densità, interno, esterno e fontiera dei sottoinsiemi di uno spazio topologico;

(b) Si enunci il risultato che caratterizza, in quattro versioni differenti, la densità;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S} = ([0,1] \times (0,1]) \cup ([-1,0] \times [-1,0)) \cup (\{1,-1\} \times [-1,1]) \cup \left\{ (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right\}.$$

(a) Determinare

$$\overline{\mathcal{S}}, \qquad \mathrm{D}(\mathcal{S}), \qquad \mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(\mathcal{S}));$$

(b) per ciascuno degli insiemi in (a) calcolare le componenti connesse;

(c) sia $\mathcal{A} = \mathrm{Int}(\mathcal{S})$. Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ se e solo se } (x_1, y_1) = \pm(x_2, y_2).$$

Determinare un omeomorfismo esplicito tra $\mathcal{A}/\!\sim$ e $D_1((0,0))$.

3. Sia d una distanza su $\mathbb{R}^2$ e si considerino i seguenti sottospazi di $(\mathbb{R}^2, d)$:

$$A = \{(x, x/n) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z} - \{0\}\}, \quad B = \{(x, n) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\},$$

e l'applicazione $f : B \to A$ definita da $f(x, n) = (x, x/n)$.

(a) Se d è la distanza euclidea, si dimostri che f è continua.

(b) Se d è la distanza euclidea, f è aperta?

(c) Se d è una distanza qualsiasi, f è continua?

4. (a) Si definiscano le nozioni di connessione e connessione per archi negli spazi topologici;

(b) si enuncino i teoremi che relazionano tali nozioni con le stesse negli spazi prodotto;

(c) si dimostrino tali teoremi.

5. Si consideri $\mathbb{R}$ come spazio topologico con la topologia delle semirette sinistre aperte $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, ed i sottoinsiemi in (a), (b), (c) con la topologia indotta. Vero o falso:

(a) $(-\infty, a)$ è compatto;

(b) $(-\infty, a]$ è compatto;

(c) $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$ è compatto.

6. Siano A e B due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea e si definisca $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

(a) Si dimostri che se A e B sono compatti allora $A + B$ è compatto;

(b) Si dimostri che se A e B sono connessi per archi allora $A + B$ è connesso per archi;

(c) se A e B sono sconnessi allora $A + B$ è sconnesso?