UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 25-6-2004 - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano gli assiomi di numerabilità e la nozione di separabilità di uno spazio topologico;

(b) Si enunci il risultato principale che relaziona gli assiomi di numerabilità, la separabilità e gli spazi metrizzabili;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Per ogni punto (x, y) di $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia di insiemi

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{[x, x+u] \times [y, y+v], u > 0, v > 0\}$$

e sia

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \forall (x, y) \in A,\ \exists B \in \mathcal{B}_{(x,y)} \text{ tale che } B \subset A\}.$$

(a) Si dimostri che $\mathcal{T}$ è una topologia su $\mathbb{R}^2$ tale che la famiglia $\mathcal{B}_{(x,y)}$ è un sistema fondamentale di intorni di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Si dimostri che $\mathcal{T}$ non è meno fine della topologia euclidea.

(c) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ è connesso?

3. Siano X ed Y due spazi topologici, $A, B, X_n, n \in \mathbb{N}$, dei sottoinsiemi di X con la topologia indotta tali che $A \cup B = X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e sia $f : X \to Y$ un'applicazione.

(a) Si dimostri che se $x \in A \cap B$ e $f_{|A}, f_{|B}$ sono continue in x, allora f è continua in x;

(b) Si trovi un esmpio in cui $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e $f_{|X_n}$ è continua in x $\forall n$, ma f non è continua in x;

(c) se $f_{|A}, f_{|B}$ sono continue in A e B rispettivamente, allora f è continua in X?

4. (a) Si definiscano le tre nozioni di compattezza negli spazi topologici;

(b) si enunci il teorema che relaziona tali nozioni negli spazi metrici;

(c) si dimostri tale teorema.

5. Siano $X = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ e $Y = (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2) \cap D_1((0,0))$ con la topologia indotta da quella euclidea su $\mathbb{R}^2$.

(a) Si dimostri che X è connesso.

(b) Y è compatto?

6. Sia (X, d_X) uno spazio metrico con la seguente proprietà: $\forall\, x \in X, \forall\, \epsilon > 0$ esiste $\delta > \epsilon$ tale che $\overline{D_\delta(x)}$ è compatto.

(a) Si dimostri che X è completo.

(b) Siano ora (Y, d_Y) uno spazio metrico e $f : X \to Y$ un'applicazione continua suriettiva. Si trovi un esempio in cui Y non è completo.