GE2 - Tutorato IV - Lunedì 20 ottobre 2003 d.C.
tutori Federico Coglitore e Chiara Valenti

1. Usando il teorema spettrale diagonalizzare (trovando una base diagonalizzante) le seguenti forme quadratiche $q(X, Y, Z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
($\mathbb{R}^3$ spazio euclideo con il prodotto scalare standard).
   (a) $2XY - 2XZ + 4YZ$
   (b) $2X^2 + 2Y^2 + 2Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ$

2. Sia T un operatore lineare su V $\mathbb{R}$- spazio vett. euclideo. Dire se ognuna delle seguenti condizioni implica necessariamente $T = 0$
   (a) $< T(u), v >= 0 \ \forall u, v \in V$
   (b) T è autoaggiunto e $< T(u), u >= 0 \ \forall u \in V$
   (c) $< T(u), u >= 0 \ \forall u \in V$
   (d) $< T(u), T(u) >= 0 \ \forall u \in V$

3. Sia V un $\mathbb{R}$- spazio vettoriale euclideo (di dim. finita) e T un operatore lineare su V . Mostrare che Im $T^t = (KerT)^\perp$

4. Sia V un $\mathbb{R}$- spazio vett. euclideo e T un operatore autoaggiunto. Mostrare che se esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $T^n(v) = 0$ allora $v \in KerT$

5. Sia V un $\mathbb{R}$- spazio vettoriale di dimensione 2. E' assegnata su V la forma quadratica (rispetto alla base canonica) $q(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2$. Sia inoltre T un operatore lineare t.c. $T(e_1) = e_1 + 2e_2$ e $T(e_2) = 2e_1 + e_2$
   (a) Dimostrare che b, forma bilineare polare di q, definisce un prodotto scalare su V
   (b) T è un operatore simmetrico?

6. Sia V un $\mathbb{R}$- spazio vett. euclideo di dimensione finita. Sia $l_v : V \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare che ad ogni $w \in V$ associa $< w, v >$. Dimostrare che l'applicazione $l : V \to V^*$ che manda $v \in V$ in $l_v \in V^*$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali. Dedurre da questo che per ogni operatore F da V in V esiste, ed è unico, l'aggiunto di F.