

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica  
Corso di GE2 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004  
Docente: Prof. A. Verra - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini

Esercitazione del 7/10/2003

Definizione di applicazione bilineare degenera, definizione di vettore isotropo Esempi di applicazioni bilineari non degeneri che possiedono vettori isotropi. Una forma bilineare non nulla può avere come vettori isotropi tutti i vettori dello spazio?  
Metodo di ortogonalizzazione di una base tramite il procedimento di Gram-Schmidt. Definizione di coefficiente di Fourier di un vettore e di proiezione di un vettore.

1.1  $V = \mathbb{R}^4$ , con prodotto scalare ordinario.

Trovare una base ortogonale usando il metodo di Gram-Schmidt sul seguente sistema di generatori:

$$v_1 = (0, 1, 0, 1) \quad v_2 = (2, 1, 0, 1) \quad v_3 = (-1, 0, 0, 1) \quad v_4 = (0, 0, 1, 0)$$

1.2 Sia  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la seguente forma quadratica:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2$$

Scrivere la forma bilineare simmetrica associata.

Trovare con Gram-Schmidt una base diagonalizzante.

1.3  $V = \mathbb{R}^4$ , prodotto scalare ordinario.

Sia  $W$  il sottospazio di  $V$  generato da

$$w_1 = (1, 1, 0, 1) \quad w_2 = (1, -1, 0, -1) \quad w_3 = (3, 1, 0, 1)$$

Calcolare la dimensione di  $W$ .

Trovare una base ortogonale di  $W$  tramite Gram-Schmidt.

Completare la base trovata a base ortogonale di  $V$ .

1.4  $V = \mathbb{R}^3$ , prodotto scalare ordinario.

Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori:

$$w_1 = (1, 1, 1) \quad w_2 = (1, 0, 1) \quad w_3 = (3, 2, 3)$$

Trovare la dimensione di  $W$ .

Trovare una base ortogonale di  $W$ .

Completarla a base ortogonale di  $V$ .

1.5 Sia  $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare simmetrica che rispetto alla base canonica è rappresentata dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Trovare una base ortogonale di vettori.

Calcolare la segnatura di  $b$ .