UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano le nozioni di dimensione (finita) di uno spazio vettoriale reale e di sottospazio;

Sia ora V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(b) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} kx_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano k un numero reale, $v_k = (1, k, 0) \in \mathbb{R}^3$, $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U_k = < (2,0,1),\ (1,1,0),\ (3,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di $(W+ < v_k >)$ e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + (W+ < v_k >)$ e di $U_k \cap (W+ < v_k >)$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^3.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e W un suo sottospazio non nullo di dimensione m.

(a) Si dimostri che esiste un sottospazio U di V tale che

$$U + W = V, \quad \text{dim} U \cap W = 1;$$

(b) si determini per quali interi $s \geq 0$ esiste un sottospazio U_s di V tale che

$$U_s + W = V, \quad \text{dim} U_s \cap W = s.$$

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi, Def. 4.14 e 4.1]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 4.17]. ■

2. Dalla matrice

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

scambiando R_1 ed R_4 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 0 & -1 \\ k & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - kR_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -k-2 & 2 & -3 \\ 0 & -1-k & -k & 1+k & 1-k \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 + 2R_2, R_4 \to R_4 + (k+1)R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1+k & 1-k \end{pmatrix}$$

e scambiando R_3 con R_4 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+k & 1-k \\ 0 & 0 & -k & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 + kR_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+k & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k+2 & -k^2+k-3 \end{pmatrix}.$$

Dato che $k^2 + k + 2 \neq 0$ per ogni k, si è ottenuto un sistema a gradini che è dunque compatibile per ogni k ed ha l'unica soluzione

$$X_1 = \frac{2k-1}{k^2+k+2}, X_2 = -\frac{k+5}{k^2+k+2}, X_3 = \frac{k+5}{k^2+k+2}, X_4 = \frac{-k^2+k-3}{k^2+k+2}. \blacksquare$$

3. Osserviamo che B è ottenuta da I_3 scambiando la seconda e la terza riga di I_3, dunque potremo trasformare A in B con sole operazioni elementari se e solo se A è invertibile, ovvero se e solo se A può essere trasformata in I_3 con sole operazioni elementari.
Scambiando R_1 con R_3 in A si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & -2 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 + (1-k)R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-k \end{pmatrix}.$$

Ora se $k = -1$ la terza riga è nulla e non è possibile trasformare A in I_3 con sole operazioni elementari (in quanto, per $k = -1$, A ha rango 2 mentre I_3 ha rango 3). Se invece $k \neq -1$, dividendo R_3 per $-1 - k$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_1 \to R_1 - 2R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed infine con l'operazione $R_1 \to R_1 - R_2$ si ottiene I_3, da cui scambiando la seconda e la terza riga si trova B. ■

4. (a) Un vettore $v = (x, y, z)$ appartiene a W se e solo se ne soddisfa le equazioni, quindi se e solo se $x = 0, y = z$. Pertanto i vettori di W sono tutti del tipo $(0, y, y) = y(0, 1, 1)$, quindi, posto $w = (0, 1, 1)$, si ha che $W =< w >$ e $W+ < v_k >=< w, v_k >$. Notiamo che w e v_k sono linearmente indipendenti per ogni k:

$$aw + bv_k = 0 \;\text{ implica}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + kb = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

cioè $a = b = 0$. Ne segue che una base di $W+ < v_k >$ è $\{w, v_k\}$.

Ora vediamo una base di U_k:

$$a(2, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(3, 1, k) = 0 \;\text{ da il sistema}$$

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + kc = 0 \end{cases} .$$

Eseguiamo operazioni elementari sulla matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} .$$

Scambiando R_1 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_1$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-2k \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2k \end{pmatrix}.$$

Ora, se $k = 1$, il sistema ha infinite soluzioni del tipo $a = b = -t, c = t, t \in \mathbb{R}$ e dunque $(2,0,1), (1,1,0)$ e $(3,1,k)$ sono linearmente dipendenti, mentre chiaramente $(2,0,1)$ e $(1,1,0)$ sono linearmente indipendenti.

Pertanto, per $k = 1$, una base di U_1 è $\{(2,0,1),(1,1,0)\}$.

Invece, se $k \neq 1$, il sistema ha l'unica soluzione $a = b = c = 0$ e dunque $(2,0,1), (1,1,0)$ e $(3,1,k)$ sono linearmente indipendenti.

Allora, per $k \neq 1$, una base di U_k, è $\{(2,0,1),(1,1,0),(3,1,k)\}$.

(b) Se $k \neq 1$ abbiamo appena visto che $\dim U_k = 3$ da cui $U_k = \mathbb{R}^3$ e quindi anche $U_k + (W + < v_k >) = \mathbb{R}^3$. Pertanto, per $k \neq 1$, si ha $\dim U_k + (W + < v_k >) = 3$ e dalla formula di Grassmann si deduce

$$\dim U_k \cap (W + < v_k >) = \dim U_k + \dim(W + < v_k >) - \dim(U_k + (W + < v_k >)) = 3+2-3 = 2.$$

Invece, se $k = 1$, si ha $U_1 =< (2,0,1),(1,1,0) >, W+ < v_1 >=< (0,1,1),(1,1,0) >$, da cui $U_1 + (W + < v_1 >) =< (2,0,1),(1,1,0),(0,1,1) >$. Verifichiamo se tali vettori sono linearmente indipendenti:

$$a(2,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1) = 0 \ \text{ da il sistema}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

che ha chiaramente l'unica soluzione $a = b = c = 0$. Dunque $(2,0,1),(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ sono linearmente indipendenti e $\dim U_1 + (W+ < v_1 >) = 3$. Dalla formula di Grassmann si deduce stavolta

$$\dim U_1 \cap (W+ < v_1 >) = \dim U_1 + \dim(W+ < v_1 >) - \dim(U_1 + (W+ < v_1 >)) = 2+2-3 = 1.$$

(c) Se $k \neq 1$ sappiamo che $U_k = \mathbb{R}^3$ e quindi $U_k \cap W = W \neq \{0\}$. Pertanto la somma di U_k e W non può essere diretta. Invece se $k = 1$ abbiamo visto sopra che $(2,0,1),(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim U_1 + W = 3$, cioè $U_1 + W = \mathbb{R}^3$. Infine la formula di Grassmann da

$$\dim U_1 \cap W = \dim U_1 + \dim W - \dim(U_1 + W) = 2 + 1 - 3 = 0$$

quindi $U_1 \cap W = \{0\}$ e perciò $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^3$. ■

5. (a) Si osservi che, affinchè U esista, deve essere, per la formula di Grassmann,

$$\dim U = \dim(U + W) + \dim U \cap W - \dim W = n + 1 - m.$$

Per mostrare che un tale U esiste, sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Per la Proposizione 4.16, 2) del [Sernesi] esiste un completamento $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ ad una base di V. Sia $U =< w_1, v_{m+1}, \dots, v_n >$.
Allora $\dim U = n + 1 - m, U + W =< w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n >= V$, quindi, per la formula di Grassmann, $\dim U \cap W = 1$.
(b) Analogamente si osservi che, affinchè U_s esista, deve essere, per la formula di Grassmann,

$$\dim U_s = \dim(U_s + W) + \dim U_s \cap W - \dim W = n + s - m.$$

In particolare deve essere $\dim U_s \leq \dim V$, quindi $s \leq m$. Mostriamo ora che per ogni $s \leq m$ un tale U_s esiste. Con le stesse notazioni di (a) sia $U =< w_1, \dots, w_s, v_{m+1}, \dots, v_n >$.
Allora $\dim U_s = n + s - m, U_s + W =< w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n >= V$, quindi, per la formula di Grassmann, $\dim U_s \cap W = s$. ■