UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2003-2004

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore e di polinomio caratteristico di F;

(b) Si enunci il risultato che relaziona gli autovalori, gli autospazi ed il polinomio caratteristico di F;

(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia p il piano di equazione $X - Y + Z = 0$ e si considerino la retta $\mathcal{R}$ di equazioni cartesiane

$$\mathcal{R}: \quad \begin{array}{l} X - Y - 1 = 0 \\ X - 2Y + 2 = 0 \end{array}$$

e, al variare del numero reale a, la retta $\mathcal{R}_a$ passante per $P(1, -1, 0)$ e con vettore di direzione $v = ae_1 + e_2 - e_3$.

(a) Esiste un piano che contiene tutte e due le rette per qualche valore di a?

(b) Si determinino i valori di a per cui esiste un piano affine q tale che q è parallelo a p, q contiene $\mathcal{R}_a$ e q non contiene $\mathcal{R}$. In tal caso si determini l'equazione cartesiana di q.

(c) Si determinino i valori di a per cui esiste un piano affine q tale che q è parallelo a p, q contiene $\mathcal{R}_a$ e q contiene $\mathcal{R}$. In tal caso si determini l'equazione cartesiana di q.

3. Siano U, V e W tre spazi vettoriali reali e siano $G : U \to V$, $F : V \to W$ due applicazioni lineari.

(a) Si dimostri che se $F \circ G$ è suriettiva allora F è suriettiva;

(b) si supponga ora che F è suriettiva. Si dimostri che $F \circ G$ è suriettiva se e solo se $N(F) + \mathrm{Im}G = V$;

(c) si costruisca un esempio esplicito in cui $F \circ G$ è suriettiva e $N(F) \oplus \mathrm{Im}G = V$.

4. Sia α un numero reale e $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che, considerata la base canonica $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $\mathbb{R}^4$, si ha

$$F(E_1) = E_2, F(E_2) = -2E_2, F(E_3) = E_1 + E_3, F(E_4) = E_1 + \alpha E_4.$$

(a) Determinare la matrice A di F rispetto alla base canonica;

(b) trovare, per ogni α, basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di α per i quali esiste una matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D = P^{-1}AP$.

5. Sia A uno spazio affine di dimensione $n \geq 5$ e siano S un un sottospazio di A di dimensione $n-2$ e T un sottospazio di A di dimensione $n-3$. Si dimostri che tre soli casi sono possibili:

(a) S è parallelo a T;

(b) $S \cap T \neq \emptyset$ e $\dim S \cap T = n-5$;

(c) S non è parallelo a T e o $S \cap T = \emptyset$ oppure $S \cap T \neq \emptyset$ e $\dim S \cap T = n-4$.

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi] Definizioni 13.4 e 13.10; (b) e (c) 13.15.5. ■

2. (a) Le equazioni parametriche di $\mathcal{R}_a$ sono $\begin{cases} X = 1 + at \\ Y = -1 + t \\ Z = -t \end{cases}$, da cui, eliminando t si ottengono le equaziioni cartesiane

$$\mathcal{R}_a : \quad \begin{matrix} X + aZ - 1 = 0 \\ Y + Z + 1 = 0 \end{matrix} .$$

Le rette $\mathcal{R}_a$ ed $\mathcal{R}$ sono complanari se e solo se [Sernesi, Proposizione 10.4]

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4a - 3.$$

Quindi esiste un piano che contiene tutte e due le rette se e solo se $a = \frac{3}{4}$. (b) e (c) Un piano affine q parallelo a p ha equazione $X - Y + Z = d, d \in \mathbb{R}$. Sostituendo le equazioni parametriche di $\mathcal{R}_a$ in quella di q si trova che q contiene $\mathcal{R}_a$ se e solo se $1 + at + 1 - t - t = d, \forall t \in \mathbb{R}$, cioè se e solo se $(a-2)t + 2 - d = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Tale equazione può essere soddisfatta per ogni $t \in \mathbb{R}$ se e solo se $a = d = 2$. Ora le equazioni parametriche di $\mathcal{R}$ sono $\begin{cases} X = 3 \\ Y = 4 \\ Z = t \end{cases}$ e q contiene $\mathcal{R}$ se e solo se $4 - 3 + t = 2, \forall t \in \mathbb{R}$. Dato che questo è assurdo si ha che se q contiene $\mathcal{R}_a$ allora q non contiene $\mathcal{R}$. Dunque la risposta a (b) è che q esiste se e solo se $a = 2$ e la sua equazione è $X - Y + Z = 2$, mentre non c'è un q soddisfacente (c). ■

3. (a) $\forall w \in W$ per ipotesi esiste $u \in U$ tale che $F(G(u)) = w$, quindi esiste $v = G(u) \in V$ tale che $F(v) = w$, quindi F è suriettiva se lo è $F \circ G$. (b) Ora supponiamo che $F \circ G$ è suriettiva e sia $v \in V$. Allora $F(v) \in W$ dunque esiste $u \in U$ tale che $F(G(u)) = F(v)$, quindi, per linearità, $F(v - G(u)) = 0$, da cui $v - G(u) \in N(F)$. Quindi esiste $n \in N(F)$ tale che $v = n + G(u) \in N(F) + ImG$. Per l'arbitrarietà di v si deduce che $V = N(F) + ImG$. Viceversa supponiamo che $V = N(F) + ImG$ e mostriamo che $F \circ G$ è suriettiva: sia $w \in W$, dato che F è suriettiva esiste $v \in V$ tale che $w = F(v)$. Ora, per ipotesi esistono $u \in U, n \in N(F)$ tali che $v = n + G(u)$, da cui, $w = F(v) = F(n + G(u)) = F(n) + F(G(u)) = F(G(u))$ dato che $F(n) = 0$. Allora $w \in ImF \circ G$, quindi $F \circ G$ è suriettiva. (c) Siano $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da $G(x) = (x, 0), F(x, y) = x$. Allora è chiaro che $F \circ G$ è suriettiva e $ImG =$ asse x, $N(F) =$ asse y, quindi $N(F) \oplus \mathrm{Im}G = V$. ∎

4. (a) Per definizione la matrice A di F rispetto alla base canonica è

$$M_E(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Il polinomio caratteristico di F è

$$P_F(T) = \begin{vmatrix} -T & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2-T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - T \end{vmatrix} = T(T-1)(T+2)(T-\alpha)$$

dunque F ha come autovalori $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = \alpha$ (se $\alpha \neq 0, 1, -2$).
Studiamo l'autospazio $V_0(F)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} z + w = 0 \\ x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ \alpha w = 0 \end{cases}$, che ha come soluzioni $x = 2y, z = w = 0$.
Pertanto una base di $V_0(F)$ è $\{2E_1 + E_2\}$.
Ora studiamo l'autospazio $V_1(F)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} -x+z+w=0 \\ x-3y=0 \\ (\alpha-1)w=0 \end{cases}$. Se $\alpha \neq 1$ il sistema ha come soluzioni $x=z=3y, w=0$ e una base di $V_1(F)$ è $\{3E_1+E_2+3E_3\}$. Se invece $\alpha=1$ allora si ha $x=3y, z=3y-w$ da cui una base di $V_1(F)$ è $\{3E_1+E_2+3E_3, -E_3+E_4\}$.

L'autospazio $V_{-2}(F)$ è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} 2x+z+w=0 \\ x=0 \\ 3z=0 \\ (\alpha+2)w=0 \end{cases}$, che ha come soluzioni $x=z=w=0$ e una base di $V_{-2}(F)$ è $\{E_2\}$.

Infine, per $\alpha \neq 0, 1, -2$, studiamo l'autospazio $V_\alpha(F)$: esso è dato, nella base canonica, dalle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè il sistema $\begin{cases} -\alpha x+z+w=0 \\ x-(2+\alpha)y=0 \\ (1-\alpha)z=0 \end{cases}$, quindi $\begin{cases} z=0 \\ x=(2+\alpha)y \\ w=\alpha(2+\alpha)y \end{cases}$, da cui una base di $V_\alpha(F)$ è $\{(2+\alpha)E_1+E_2+\alpha(2+\alpha)E_4\}$.

(c) È chiaro che esistono una matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ ed una matrice diagonale D tali che $D=P^{-1}AP$ se e solo se A è diagonalizzabile. Per $\alpha \neq 0, 1, -2$, sappiamo che A ha quattro autovalori distinti e lo spazio su cui è definita F ha dimensione 4, quindi per [Sernesi, Corollario 13.14] A è diagonalizzabile. Ora supponiamo che α sia 0 o 1 o -2. Abbiamo visto che

$$dimV_0(F)=1, dimV_{-2}(F)=1, dimV_1(F)= \begin{matrix} 1 & \text{if } \alpha \neq 1 \\ 2 & \text{if } \alpha = 1 \end{matrix} .$$

Per [Sernesi, Teorema 13.13] sappiamo che A è diagonalizzabile se e solo se $dimV_0(F)+dimV_{-2}(F)+dimV_1(F)=4$, e dunque se e solo se $\alpha=1$. ∎

5. Siano W la giacitura di S, U la giacitura di T e V lo spazio vettoriale su cui è definito A. Allora $dimW=n-2, dimU=n-3, dimV=n$. Ora $W \subseteq U+W \subseteq V$ quindi

$n-2 \leq dim(U+W) \leq n$. Se $dim(U+W)=n-2$ allora $W=U+W$ quindi $U \subset W$ e quindi S è parallelo a T. Supponiamo allora $n-1 \leq dim(U+W) \leq n$ e siano (per [Sernesi, Teorema 8.1]), in un dato riferimento affine, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i, 1 \leq i \leq 2$ le equazioni di S, $\sum_{j=1}^{n} c_{kj}X_j = d_k, 1 \leq k \leq 3$ le equazioni di T e si consideri

$$(*) \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i, 1 \leq i \leq 2 \\ \sum_{j=1}^{n} c_{kj}X_j = d_k, 1 \leq k \leq 3 \end{cases}.$$

Sappiamo inoltre che $S \cap T \neq \emptyset$ se e solo se $(*)$ è compatibile e che $dimU \cap W = n-r$ dove r è il rango della matrice $B = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ c_{kj} \end{pmatrix}$.
Ora se $dim(U+W)=n$ allora, per la formula di Grassmann, $dimU \cap W = n-5$, da cui $r=5$. Ma B ha 5 righe, dunque il suo rango coincide con il numero delle righe e pertanto anche il rango della matrice orlata $C = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_i \\ c_{kj} & d_k \end{pmatrix}$ di $(*)$ è 5. Per il teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli $(*)$ è compatibile, quindi $S \cap T \neq \emptyset$ e $dimS \cap T = n-5$. Infine se $dim(U+W)=n-1$ allora, per la formula di Grassmann, $dimU \cap W = n-4$, da cui $r=4$ e sicuramente nè $U \subset W$ nè $W \subset U$, quindi S non è parallelo a T. Ora se $r(C)=5$, per il teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli $(*)$ non è compatibile e $S \cap T = \emptyset$, invece se $r(C)=4$ allora, per il teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli $(*)$ è compatibile, $S \cap T \neq \emptyset$ e $\dim S \cap T = n-4$. ■