**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GEOMETRIA 1**

**Prova scritta del 14-2-2005 - a.a. 2003-2004**

**1.** (a) Si definiscano le nozioni di dimensione (finita) di uno spazio vettoriale reale e di sottospazio;

Sia ora $V$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e $W$ un suo sottospazio.

(b) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $V$ e di $W$;

(c) si dimostri tale risultato.

**2.** Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + hX_3 - X_4 = 1 \\ X_1 + X_2 - X_4 = h \\ hX_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

**3.** Sia $k$ un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di $k$ per i quali $A$ può essere trasformata in $B$ con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di $k$ individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma $A$ in $B$.

**4.** Siano $k$ un numero reale, $V = M_2(\mathbb{R})$ e siano $U_k, W_k$ i sottospazio vettoriali

$$U_k = < \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} >,$$

$$W_k = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > .$$

(a) Si determinino due basi di $W_k$ e $U_k$;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \cap W_k$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di $k$ per i quali

$$U_k \oplus W_k = V.$$

**5.** (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

**6.** Sia $a$ un numero reale e sia $A$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale $V$ e sia $O, e_1, e_2, e_3$ un riferimento affine. Si considerino le due rette $r_1, r_2$ di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} X = at + 1 \\ Y = t \\ Z = -3t + 2 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} X = -3t \\ Y = 2t + 1 \\ Z = -t - 1 \end{cases}.$$

Si determinino i valori di $a$ per i quali:

(a) esiste una retta $r$ parallela ad $r_1$ ed incidente $r_2$;

(b) esiste un piano $p$ parallelo ad $r_1$ ed $r_2$, ma che non le interseca;

(c) sia $p$ un piano come in (b). Esiste una retta $r$ parallela a $p$ ed incidente $r_1$ ed $r_2$?

**7.** Siano $V$ e $W$ due spazi vettoriali reali e sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Si determini quando esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che:

(a) $N(F) = \mathrm{Im}G$ e $N(G) = \mathrm{Im}F$;

(b) $G$ è iniettiva e $\mathrm{Im}G = N(F)$

(c) $V/N(F) \cong W/N(G)$.

**8.** Sia $a$ un numero reale e sia $A \in M_4(\mathbb{R})$ la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di $A$;

(b) trovare basi per gli autospazi di $A$;

(c) determinare i valori di $a$ per i quali $A$ è diagonalizzabile.