UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 21-6-2004 - a.a. 2003-2004

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensione di V;

(b) Si enunci il teorema principale che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + hX_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 - X_4 = 1 \\ -X_1 + hX_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 - ke_4, v_2 = e_2 - e_3, v_3 = ke_1 + e_2, v_4 = e_1 + e_2 + e_3.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_3 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati. Si calcoli la dimensione di U e di W;

(b) si determini se esistono valori di k tali che $U \subset W$;

(c) si determini se esistono valori di k tali che $dim U \cap W = 2$.

5. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia a un numero reale e sia A uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine. Si considerino i punti $A(0,-1,0)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,0,0)$. Si determinino (se esistono o si dimostri che non esistono):

(a) le equazioni della retta passante per il punto A e parallela alla retta $\overline{BC}$;

(b) le equazioni del piano passante per il punto $P(1,2,0)$ e parallelo al piano $\overline{ABC}$;

(c) tutti e soli i punti P tali che P, A, B, C generano un piano affine e che la retta $\overline{PB}$ è complanare con la retta $\overline{AC}$.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F sotto le quali esiste uno spazio vettoriale U ed un'applicazione lineare non nulla $G : U \to V$ tale che $N(F) \cap Im(G) = \{0\}$;

(b) si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F sotto le quali esiste un'applicazione lineare non iniettiva $G : V \to W$ tale che $N(F) \oplus N(G) = V$;

(c) si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F sotto le quali esiste uno spazio vettoriale U ed un'applicazione lineare $G : U \to V$ tale che $V/N(F) \cong V/Im(G)$.

8. Sia a un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.