Soluzioni VIII

24/11/2003

Continuità in $\mathbb{R}^2$

Esercizio 1. (i) Osserviamo che $f(x, y)$ è un rapporto di due funzioni che sono continue in quanto composizione somma e prodotto di funzioni continue (nel loro insieme di definizione), inoltre il denominatore, per $x \neq 0$ non si annulla, e quindi la funzione f è, essa stessa, continua.

(ii) Consideriamo per il momento solo $x > 0$ e passiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

La funzione diventa

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \begin{cases} \frac{\rho^2}{\frac{\pi}{2}+2\theta} & \text{se } \theta \neq \pm\pi/2 \\ \frac{\rho^2}{2\pi} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ perchè abbiamo preso $x > 0$ Quindi

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 0.$$

Questo risultato, però, non basta per garantire la continuità nell'origine.

(iii) Osserviamo che

$$\sup_{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \infty$$

Quindi, questo ci induce a pensare che la funzione non sia continua in zero, infatti se ci avviciniamo all'origine sulla curva $x = -y^3$ otteniamo

$$\lim_{y\to 0^-} f(x, y)\Big|_{x=-y^3} = \lim_{y\to 0^-} \frac{y^4+1}{2} \frac{y^2}{\frac{\pi}{2} - \arctan(1/y^2)} = \frac{1}{2},$$

usando $\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)) = 1$. Quindi la funzione ammettendo due limiti diversi non può essere continua. Alla luce di ciò lo studio dl caso $x < 0$ diventa superfluo.

Esercizio 2. (i) Considero la funzione $t^{\frac{\alpha}{2}}$ nel punto $t_0 = 1$. Per il Teorema di Lagrange, essendo $t^{\frac{\alpha}{2}}$ derivabile con derivata continua, possiamo affermare che $\exists \xi \in B_{|t-1|}(1)$:

$$t^{\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{\alpha}{2}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1}(t-1),$$

con $|t-1| < 1/2$ per evitare valori negativi di t per i quali la funzione $t^{\frac{\alpha}{2}}$ non è definita. Quindi, maggiorando,

$$|t^{\frac{\alpha}{2}} - 1| \leq |t-1| \sup_{B_{|t-1|}(1)} \frac{\alpha}{2}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1} \leq C_\alpha |t-1|,$$

dove $C_\alpha = \sup_{B_{1/2}(1)} \frac{\alpha}{2}\xi^{\frac{\alpha}{2}-1}$, se $|t-1| < 1/2$. Notiamo che C_α esiste perchè è l'estremo superiore di una funzione continua su un compatto.
Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned}
|x^2+y^2-1| &= ||(x,y)|^2 - |(0,1)|^2| \\
&= ||(x,y)| - |(0,1)||(|(x,y)| + |(0,1)|) \\
&\leq |(x,y) - (0,1)|(|(x,y)| + |(0,1)|) \\
&= |(x,y-1)|(|(x,y)| + |(0,1)|) \leq 3\delta,
\end{aligned}$$

se $|(x,y-1)| < \delta < 1$ (infatti $|(x,y)| + |(0,1)| < 1 + \delta + 1 < 3$). Tornando alla nostra funzione e sfruttando quanto visto finora possiamo affermare che:

$$|(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} - 1| \leq C_\alpha |x^2+y^2-1| = C_\alpha ||(x,y)|^2 - |(0,1)|^2| \leq 3C_\alpha\delta < \epsilon,$$

se $3\delta < 1/2 \Leftrightarrow \delta < 1/6$. Infatti sotto quest'ultima condizione si ha che $|x^2+y^2-1| < 1/2$ e quindi possiamo applicare lo studio fatto sulla funzione $t^{\frac{\alpha}{2}}$ con $t = x^2+y^2$. Poniamo quindi $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3C_\alpha}, \frac{1}{6}\}$.
Possiamo anche cercare di scrivere analiticamente il valore di C_α. Ci sono da distinguere tre casi: $\frac{\alpha}{2} > 1, \frac{\alpha}{2} = 1, \frac{\alpha}{2} < 1$: nel primo caso la funzione è crescente e quindi il sup si verificherà per $\xi = 3/2$ quindi $C_\alpha = \frac{\alpha}{2}(\frac{3}{2})^{\frac{\alpha}{2}-1}$. Nel secondo $\frac{\alpha}{2} = 1$ e quindi $C_2 = 1$. Nel terzo la funzione è decrescente e quindi il sup si verificherà per $\xi = 1/2$ dunque $C_\alpha = \frac{\alpha}{2}(\frac{1}{2})^{\frac{\alpha}{2}-1}$.

(ii) Siano $t, t_0 \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione $\sin t$. Per il Teorema di Lagrange $\exists \xi \in B_{|t-t_0|}(t_0)$ tale che

$$\sin t - \sin t_0 = (t-t_0)\cos\xi.$$

Passando quindi ai moduli e maggiorando otteniamo

$$|\sin t - \sin t_0| \leq |t-t_0| \sup_{\mathbb{R}} \cos\xi = |t-t_0|$$

per ogni $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Sia $(x_0, y_0) = (-1, -1)$, stimiamo

$$\begin{aligned}
|\sin\frac{1}{xy^2} - \sin(-1)| &\leq |\frac{1}{xy^2} - (-1)| = |\frac{1 + y - y - y^2 + y^2 + xy^2}{xy^2}| \\
&\leq \frac{|1 + y|}{|x|y^2} + |y|\frac{|y + 1|}{|x|y^2} + y^2\frac{|x + 1|}{|x|y^2}.
\end{aligned}$$

Ora se prendo $\delta < 1/2$ e $|(x, y) - (-1, -1)| < \delta$ si avrà $-3/2 < x, y < -1/2$ quindi $|x|, |y| > 1/2$, e $|x - (-1)|, |y - (-1)| < \delta$.
Dunque

$$|\sin\frac{1}{xy^2} - \sin(-1)| \leq 2\delta + 4\delta + 8\delta = 14\delta < \epsilon.$$

Prendo quindi $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{14}, \frac{1}{2}\}$.

(iii) Sia $t_0 = 1$ e $t \in B_\eta(1)$, $0 < \eta < 1$ allora usando il Teorema di Lagrange e maggiorando la derivata prima del logaritmo otteniamo la stima

$$|\log t - \log 1| \leq |t - 1| \sup_{B_\eta(1)} 1/\xi \leq \frac{|t - 1|}{1 - \eta}.$$

Ora, tralasciando per il momento questa considerazione, studiamo $\cos t - 1 = \cos t - \cos 0$. Usando il polinomio di Taylor in 0 al primo ordine con il resto di Lagrange possiamo affermare che $\exists \xi$ con $|\xi| \leq t$ e

$$\cos t = \cos 0 - t \sin 0 - \frac{t^2}{2}\cos\xi = 1 - \frac{t^2}{2}\cos\xi.$$

Quindi $|\cos t - 1| \leq \frac{t^2}{2}$.
Ora torniamo al nostro problema; avevamo che $|(x, y)| < \delta$ quindi $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|$, da cui $|xy| = |x||y| \leq |(x, y)|^2 < \delta^2$. Allora

$$|\cos xy - 1| \leq \frac{(xy)^2}{2} \leq \frac{\delta^4}{2},$$

pongo $\eta = \min\{\frac{\delta^4}{2}, 1\} = \frac{\delta^4}{2}$ se, per esempio, $\delta < 1$. Dunque

$$|\log\cos xy| \leq \frac{|\cos xy - 1|}{1 - \delta^4/2} < 2|\cos xy - 1| \leq 2\frac{\delta^4}{2} < \epsilon.$$

Sia quindi $\delta = \min\{\sqrt[4]{\epsilon}, 1\}$.
Osserviamo che anche in questo esercizio, come nei precedenti, potevamo usare il Teorema di Lagrange, ma usando il polinomio di Taylor ci spingiamo fino ad un ordine maggiore e quindi riusciamo ad ottenere una stima migliore per δ.

Esercizio 3. Osserviamo che la funzione è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ essendo composizione, somma e prodotto di funzioni continue. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice positivamente omogenea di grado α se $\forall t > 0$ si ha

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

ed inoltre si ha che una funzione f positivamente omogenea di grado α continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non identicamente costante può essere estesa ad una funzione continua su tutto $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 0$ e $f(0) = 0$. La nostra funzione è positivamente omogenea di grado $2\alpha - \beta$: infatti si ha

$$f(tx, ty) = \frac{t^{2\alpha}|xy|^\alpha}{t^\beta |(x, y)|^\beta} = t^{2\alpha-\beta} \frac{|xy|^a}{|(x, y)|^\beta} = t^{2\alpha-\beta} f(x, y).$$

Quindi

$$f \in C(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow 2\alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 2\alpha.$$

Esercizio 4. La funzione è continua un $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 1\}$ in quanto composizione, somma prodotto di funzioni continue. Vediamo che succede nei punti $(1, y_0)$. Se $|(x, y) - (1, y_0)| < \delta$ si ha che $|y - y_0| < \delta|$ e

$$|y| < |y_0 + \delta| \leq |y_0| + |\delta| < |y_0| + 1$$

se $\delta < 1$ e

$$y^2 > \min\{(y_0 - \delta)^2, (y_0 + \delta)^2\} > \min\{(y_0 - 1)^2, (y_0 + 1)^2\} =: M_0$$

perciò

$$ye^{-(\frac{y}{x-1})^2} < (|y_0| + 1)e^{-\frac{M_0}{(x-1)^2}} < (|y_0| + 1)e^{-\frac{M_0}{\delta^2}} = \epsilon.$$

Quindi basta prendere

$$\delta = \sqrt{-\frac{1}{M_0} \log\left(\frac{\epsilon}{|y_0| + 1}\right)}.$$