

### 3. ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Ricordiamo l'enunciato del principio di induzione: Sia  $\{P_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  una successione di proposizioni. Se :

- (i)  $P_1$  é vera;
  - (ii)  $P_k \Rightarrow P_{k+1} \quad \forall k \in \mathbf{N}$ ,
- Allora  $P_n$  é vera  $\forall n \in \mathbf{N}$ .

#### Esercizio 1

Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze e disuguaglianze:

- (a)  $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
- (b)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- (c) se  $a \geq -1$ ,  $(1+a)^n \geq 1+na$  (disuguaglianza di Bernoulli)
- (d)  $n! \geq 2^{n-1}$
- (e) se  $a \neq 1$ ,  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

#### Esercizio 2

Se  $x \geq 1$ , usando la disuguaglianza di Bernoulli, dimostrare che

$$x^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{x-1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

#### Esercizio 3

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbf{N}$  il numero  $n + n^2$  é pari.