Am1a , a.a. 2003/04
Comm. Prof. Mario Girardi

Prova di Esame - 16 giugno 2004 [Soluzioni]

ESERCIZIO 1
Calcolare estremo inferiore e superiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ x = \frac{\pi}{|2\arctan n|},\ n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Considerando che la funzione arcotangente é crescente, e quindi la sua reciproca é decrescente, avremo che il massimo si ottiene per $n = 1$ e l'inf sará il limite della successione. Quindi il massimo dell'insieme é $\frac{\pi}{2\arctan 1} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$. L'estremo inferiore invece si trova passando a limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\arctan n} = 1.$$

Non c'é bisogno di dimostrare che 1 é veramente un inf, ovvero non dobbiamo ricorrere alla caratterizzazione , dato che lo troviamo come limite di una successione, quindi esso sará automaticamente un punto di accumulazione.

ESERCIZIO 2 Calcolare il limite della seguente successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \frac{e^{\frac{\sin n}{n}} - 1}{\sin n} \right) - \sqrt{n^2 \frac{1 - \cos(\frac{\sin n}{n})}{(\sin n)^2}}$$

Si possono calcolare separatamente i limiti della funzione nelle parentesi tonde e della radice poiché entrambi i limiti hanno valore finito. Calcoliamo il primo limite, utilizzando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-1}}{x} = 0$, e considerando che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{\sin n}{n}} - 1}{\frac{\sin n}{n}} \right) = 1.$$

Per quanto riguarda il limite della funzione sotto radice, tenendo presente il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{\sin n}{n}\right) - 1}{\frac{(\sin n)^2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

pertanto il risultato finale é $1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

ESERCIZIO 3 a) Stabilire per quali valori del parametro reale a la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2a+8}{a^2} \right)^{n^{\frac{3}{2}}}$$

b) Stabilire per quali valori del parametro reale positivo x la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x^n}{2^n\log n}\right)$$

Applicando il criterio della radice, otteniamo che la prima serie converge assolutamente se $\left|\frac{2a+8}{a^2}\right| < 1$, ovvero $a < -1, a > 4$. Non si ha convergenza semplice per $a = -1, a = 4$.
Passiamo alla seconda serei. Possiamo applicare il criterio di Leibniz, quindi dobbiamo verificare che la successione $\frac{x^n}{2^n\log n}$ é infinitesima e decrescente. Si verifica facilmente che la suddetta successione é infinitesima se $x \leq 2$. Per questi stessi valori é anche decrescente, infatti: (verifichiamo che $a_n > a_{n+1}$)

$$\frac{x^n}{2^n\log n} > \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}\log(n+1)} \iff 1 > \frac{x}{2}\frac{\log n}{\log(n+1)}$$

l'ultima disuguaglianza é vera in quanto il logaritmo é una funzione crescente e $x \leq 2$.

ESERCIZIO 4 Determinare per quali valori dei parametri reali α e β la seguente funzione è continua

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{4\alpha}{x^4+1} & x > 2, \\ x + 7\beta - 1 & x \leq 2. \end{cases}$$

Soluzione. f è continua in $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha = \frac{17}{4}(1+7\beta)$. Infatti: l'unico punto in cui si potrebbe avere discontinuitá é 2.
Si ha:

$$f(2) = 1 + 7\beta,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{4\alpha}{x^4+1} = \frac{4\alpha}{17}.$$

Quindi, f è continua in $x = 2$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha = \frac{17}{4}(1+7\beta)$.

ESERCIZIO 5 Stabilire se la seguente funzione é uniformemente continua nel suo dominio di esistenza:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-7}$$

La funzione data é definite per $|x| \geq 7$, continua in tutto il suo insieme di definizione, quindi uniformemente continua su tutti i compatti. Per verificare l'uniforme contninuitá su tutto l'asse reale si devono fare i limiti per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4-x^2+7}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-7}} = 0$$

essendoci un asintoto orizzontale la funzione é unif. continua su tutto l'asse reale.