Tutorato di AM1a
Principio di induzione
Fabrizio Fanelli

Usando il principio d'induzione dimostrare che :

1. $n! \geq 2^{n-1}$

   Soluzione. Base dell'Induzione (B.I.) Verifichimo l'affermazione per $n = 1$: $1! \geq 2^0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$.OK.
   Passo Induttivo (P.I.)Supponiamo l'affermazione vera per n e dimostriamo che è vera anche per $n + 1$: $(n + 1)! = (n + 1)n! \geq (n + 1)2^{(n-1)}$(sfruttando l'ipotesi induttiva). $(n+1)2^{(n-1)} \geq 2^{(n)} \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 1$.

2. $n^n \geq n!$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   Soluzione. Prima dimostrate che $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$, così avrete dimostrato la seconda affermazione.
   Poi dimostrate che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \; \forall a \neq 1$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6. $(1+a)^n \geq 1 + na + \dfrac{n(n-1)}{2}a^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$

7. Se $\mu_i \in (0,1)$ per $1 = 1, \ldots, n$ allora
   $(1-\mu_1)(1-\mu_2)\cdots(1-\mu_n) \geq 1 - \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)$

8. Sia $x \geq 1$,usando la disuguaglianza di Bernoulli,dimostrare che $\sqrt[n]{x} - 1 \leq \dfrac{x-1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Soluzione. Riscriviamo: $\sqrt[n]{x} \leq 1 + \dfrac{x-1}{n} \Leftrightarrow x \leq \left(1 + \dfrac{x-1}{n}\right)^n$, ma, usando la diseg. di Bernoulli abbimo che:
$\left(1 + \dfrac{x-1}{n}\right)^n \geq 1 + n\dfrac{x-1}{n} = x.$