Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
AL 1
Esercizi per casa, IV prova

Consegnare entro martedì 9 dicembre.

1. Determinare se le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive o biiettive, e di ciascuna determinare l'immagine:

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \mathrm{MCD}(n, 30)$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3/3$

(c) $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $\frac{m}{n} \mapsto \frac{mn(mn+1)}{2}$, dove $m, n \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$. (Se non richiediamo che $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$, f_3 è ancora una applicazione?)

2. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, l'applicazione definita da $x \to \frac{ax+b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$. Determinare per quali valori di a, b e c l'applicazione f è biiettiva e descrivere esplicitamente l'applicazione inversa di$f$.

3. Determinare se $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto all'operazione $*$ definita da $a * b = a + b - 5$, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

4. Sia $n \in \mathbb{N}$ e $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$.

(a) Dimostrare che C_n è un gruppo rispetto alla usuale moltiplicazione fra numeri complessi.

(b) Dimostrare che esiste un isomorfismo fra $(C_n, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}/\equiv_n, +)$.