

III SETTIMANA

Il Principio di Induzione (I) per sottoinsiemi del tipo $\mathbb{N}(n_0) : \{x \geq n_0 \mid x \in \mathbb{Z}\}$. La proprietà del Buon Ordinamento (BO) per gli insiemi del tipo $\mathbb{N}(n_0)$ (cioè, ogni sottoinsieme non vuoto S di $\mathbb{N}(n_0)$ possiede un primo elemento). Dimostrazione di (I) \Rightarrow (BO).

Il Principio di Induzione formulazione “ampia” (I_A). Dimostrazione del teorema: $(I_A) \Leftrightarrow (I) \Leftrightarrow (BO)$.

Vari esempi di dimostrazioni per induzione.

Divisione con il resto in \mathbb{Z} . MCD, mcm. Esistenza (ed unicità in \mathbb{N}) del MCD di due elementi non entrambi nulli di \mathbb{Z} . Identità di Bézout. Prime proprietà del MCD e del mcm, tra le quali la formula fondamentale:

$$\text{MCD}(a, b)\text{mcm}(a, b) = ab.$$

Tali argomenti si possono trovare nei Paragrafi 3 e 4 di [FG].

* * *

[FG] Marco Fontana e Stefania Gabelli, *Insiemi, numeri e polinomi*. CISU, Roma 1989.

1 Principio di Induzione

Per numeri naturali, nel linguaggio comune, si intendono i numeri interi non negativi $0, 1, 2, 3, \dots$.

Da un punto di vista insiemistico-costruttivo, a partire dall'esistenza dell'insieme vuoto \emptyset , si possono definire i *numeri naturali* ponendo:

$$0 := \emptyset, 1 := \{0\}, 2 := \{0, 1\}, 3 := \{0, 1, 2\}, \dots$$

Si assume (nella teoria assiomatica degli insiemi) che la *costruzione ricorsiva* sopra descritta (ogni elemento è definito a partire dalla conoscenza di un elemento “che lo precede”) dia luogo ad *un insieme* non finito:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots\}$$

detto *insieme dei numeri naturali*. (Il postulato dell'esistenza di un insieme costituito da una infinità di oggetti individuali, quale è \mathbb{N} , viene chiamato *Assioma dell'Infinito*).

Per ogni elemento (*numero naturale*) $x \in \mathbb{N}$, si pone:

$$\text{succ}(x) := x + 1 := \{0, 1, 2, \dots, x\},$$

un tale elemento di \mathbb{N} viene chiamato *il successivo del numero naturale* x .

Una descrizione assiomatica, puramente formale, dell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è stata data da G. Peano (1858-1932):

L'insieme \mathbb{N} è un insieme dotato di “una operazione di passaggio al successivo” (cioè, un'applicazione $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto \text{succ}(x)$) che verifica le seguenti proprietà:

(**N 1**) *Esiste un elemento $0 \in \mathbb{N}$, tale che $0 \neq \text{succ}(x)$, per ogni $x \in \mathbb{N}$, (tale elemento viene chiamato zero o primo elemento di \mathbb{N}).*

(**N 2**) *Se $x, y \in \mathbb{N}$ e se $x \neq y$, allora $\text{succ}(x) \neq \text{succ}(y)$.*

(**N 3**) *Se U è un sottoinsieme di \mathbb{N} tale che*

$$\text{(a) } 0 \in U, \quad \text{(b) } k \in U \Rightarrow \text{succ}(k) \in U,$$

allora $U = \mathbb{N}$.

Le precedenti proprietà sono chiamate *Postulati (od Assiomi) di Peano*. La proprietà (**N 3**) è chiamata *Principio di Induzione*.

I postulati di Peano *caratterizzano* l'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali, nel senso che è possibile dimostrare che *esiste ed è unico* (a meno di corrispondenze biunivoche che “conservano” il primo elemento e l'operazione di “passaggio al successivo”) un insieme che verifica tali proprietà. Per tale ragione, il sistema di assiomi di Peano si dice “un sistema monomorfo”.

È importante evidenziare che, dagli assiomi di Peano, discendono tutte le ben note proprietà dell'insieme dei numeri naturali. In particolare le operazioni di somma e prodotto e le ben note proprietà di tali operazioni

possono essere dedotte dagli assiomi di Peano. Per *somma di* $n, m \in \mathbb{N}$ si intende il numero naturale:

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n, & n + 1 &:= \text{succ}(x), & \text{e se } m \geq 2, \\ n + m &:= \text{succ}^m(x) := \underbrace{\text{succ}(\text{succ}^{m-1}(x))}_{m \text{ volte}} = (\dots((n+1)+1)+1\dots), \end{aligned}$$

e per *prodotto di* $n, m \in \mathbb{N}$ si intende il numero naturale:

$$nm := \underbrace{n + n + n + \dots + n}_m, \quad \text{se } m \geq 1; \quad n0 := 0.$$

La *relazione di ordine* in \mathbb{N} è definita nella maniera seguente:

$$h \leq k \quad :\Leftrightarrow \quad k = h + n, \quad \text{per un qualche } n \in \mathbb{N}.$$

Ovviamente, $h < k \quad :\Leftrightarrow \quad h \leq k$ e $h \neq k$. Dunque, $h < k \Rightarrow h + 1 \leq k$.

Per semplicità di notazione, nel seguito, denoteremo con $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'insieme dei numeri naturali positivi. Porremo, poi, $\mathbb{N}^- := \{-n : n \in \mathbb{N}^+\}$ e $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$.

* L'insieme \mathbb{Z} dei *numeri interi*, o *numeri interi relativi*, (e, quindi, i suoi sottoinsiemi $\mathbb{N}^-, \mathbb{N}^+$) viene introdotto in maniera più rigorosa come insieme-quotiente dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rispetto alla relazione di equivalenza seguente:

$$(n, m) \sim (n', m') \quad :\Leftrightarrow \quad n + m' = m + n'.$$

Un elemento dell'insieme-quotiente $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$, determinato dalla classe di equivalenza di $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, viene denotato con il simbolo $n - m$, i.e.

$$n - m := [(n, m)]_{\sim} := \{(n', m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n + m' = m + n'\}.$$

Per semplicità di notazione, presi comunque $n, m \in \mathbb{N}$, nell'insieme \mathbb{Z} si pone $-m := 0 - m$, $n := n - 0$ (identificando così \mathbb{N} con la sua immagine canonica in \mathbb{Z} , tramite l'applicazione iniettiva $n \mapsto n - 0$); dunque, in particolare, $0 = 0 - 0 = n - n$. In tal modo si definiscono, in modo rigoroso, anche $\mathbb{N}^+ := \{n : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ e $\mathbb{N}^- := \{-m : m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$ come sottoinsiemi di \mathbb{Z} . *

È subito visto che in \mathbb{Z} possono essere (ben) definite in modo naturale, a partire da quelle di \mathbb{N} , le operazioni di somma, prodotto e una relazione di ordine:

$$\begin{aligned} (n - m) + (n' - m') &:= (n + n') - (m + m'), \\ (n - m) \cdot (n' - m') &:= (nn' + mm') - (nm' + mn'), \\ (n - m) \leq (n' - m') &:\Leftrightarrow n + m' \leq n' + m. \end{aligned}$$

Pertanto, l'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi (relativi) è “il più piccolo insieme” che contiene \mathbb{N} nel quale è sempre possibile risolvere un'equazione lineare in una indeterminata X a coefficienti in \mathbb{N} del tipo seguente:

$$m + X = n, \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N},$$

la cui unica soluzione (in \mathbb{Z}) è data da $n - m$.

Si noti anche che, dalla decomposizione $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$, si ricava la cosiddetta *Legge di Tricotomia* in \mathbb{Z} , cioè: *presi comunque $x, y \in \mathbb{Z}$ allora può accadere soltanto una delle seguenti eventualità:*

$$x < y \quad \text{oppure} \quad x = y \quad \text{oppure} \quad y < x.$$

Pertanto, \mathbb{Z} è un *insieme totalmente o linearmente ordinato*, ciò significa che, presi comunque due elementi $x, y \in \mathbb{Z}$, allora:

$$x \not\leq y \Rightarrow y < x.$$

È opportuno notare che la validità del Principio di Induzione si trasferisce da \mathbb{N} ad appropriati sottoinsiemi di \mathbb{Z} , che sono in corrispondenza biunivoca naturale con \mathbb{N} . Precisamente, preso comunque un intero $n_0 \in \mathbb{Z}$, poniamo:

$$\mathbb{N}(n_0) := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq n_0\},$$

allora possiamo affermare che in $\mathbb{N}(n_0) (\subset \mathbb{Z})$ vale la seguente formulazione del:

(I) Principio di Induzione. *Sia $U \subseteq \mathbb{Z}$ tale che:*

$$\text{(a) } n_0 \in U, \quad \text{(b) } k \in U \Rightarrow k + 1 \in U,$$

$$\text{allora } U = \mathbb{N}(n_0).$$

Osservazione 1.1. Si noti che l'applicazione:

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}(n_0), \quad n \longmapsto n + n_0,$$

è un'applicazione biettiva che manda il primo elemento di \mathbb{N} (cioè, l'elemento 0) nel primo elemento di $\mathbb{N}(n_0)$ (cioè, l'elemento n_0) e che preserva l'operazione di passaggio al successivo.

Sul Principio di Induzione si basa il cosiddetto Metodo di Prova per Induzione. Supponiamo che, dato un intero n_0 , per ogni intero $n \geq n_0$, si possa formulare una proposizione $\mathbf{P}(n)$ (ad esempio, sia $n_0 = 1$, e sia $\mathbf{P}(n) :=$ “se un insieme finito S ha n elementi, allora il suo insieme delle parti $\mathcal{B}(S)$ ha 2^n elementi”; oppure $\mathbf{P}(n) :=$ “vale la seguente identità $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ”). Allora *il Metodo di Prova per Induzione* per la validità della proposizione $\mathbf{P}(n)$ consiste nel mostrare che:

- (a) $\mathbf{P}(n_0)$ è vera (Base dell'Induzione);
- (b) per un qualsiasi intero $k \geq n_0$, si ha che:
 $\mathbf{P}(k)$ è vera $\Rightarrow \mathbf{P}(k+1)$ è vera (Passo Induttivo).

Ciò permette di concludere che la proposizione $\mathbf{P}(n)$ è vera per un qualunque $n \in \mathbb{N}(n_0)$. Infatti, la validità di tale metodo di prova è subito dimostrata, utilizzando il Principio di Induzione (I), prendendo $U := \{k \in \mathbb{Z} : \mathbf{P}(k) \text{ è vera}\}$.

Teorema 1.2. *I seguenti enunciati sono tra loro equivalenti:*

- (I) **Il Principio di Induzione.**
- (I_A) **Il Principio di "Ampia" Induzione (o Formulazione "debole" del Principio di Induzione):** Siano $n_0 \in \mathbb{Z}$ e $V \subseteq \mathbb{Z}$ tali che:
 - (a) $n_0 \in V$, (b_A) $\{x \in \mathbb{Z} : n_0 \leq x \leq k\} \subseteq V \Rightarrow k+1 \in V$,
 allora $V = \mathbb{N}(n_0)$.
- (BO) **Il Principio del Buon Ordinamento (o Principio del Minimo):** Sia $n_0 \in \mathbb{Z}$ allora ogni sottoinsieme non vuoto T di $\mathbb{N}(n_0)$ ha un primo elemento o minimo, cioè un elemento $t \in T$ tale che $t \leq z$, per ogni altro elemento $z \in T$.

Dimostrazione. È ovvio che (I) \Rightarrow (I_A), dal momento che l'ipotesi in (b_A) è (apparentemente) più restrittiva dell'ipotesi in (b) e, quindi, la condizione (b) è (apparentemente) più forte della condizione (b_A).

(I_A) \Rightarrow (BO). Supponiamo, per assurdo, che esista un sottoinsieme non vuoto T di $\mathbb{N}(n_0)$ che non possieda un primo elemento (dunque, in particolare, T possiede necessariamente più di un elemento). Sia

$$V := \{x \in \mathbb{N}(n_0) : x \leq t, \text{ per ogni } t \in T\}.$$

Ovviamente, $n_0 \in V$, dunque $V \neq \emptyset$, ed inoltre $V \neq \mathbb{N}(n_0)$ (perché, se $t_1, t_2 \in T$ e se, ad esempio, $t_1 < t_2$ allora $t_2 \notin V$). Allora, per (I_A), deve esistere un elemento k tale che $\{x \in \mathbb{Z} : n_0 \leq x \leq k\} \subseteq V$, ma $k+1 \notin V$. Osserviamo che un tale elemento k deve appartenere ad T (altrimenti, se fosse $k \notin T$, poiché $k \in V$, si avrebbe che $k < t$ e, dunque, che $k+1 \leq t$, per ogni $t \in T$, cioè si avrebbe che $k+1 \in V$). Dunque tale elemento k , che appartiene tanto a V quanto a T , risulta essere un primo elemento di T e ciò contraddice l'assunto.

(BO) \Rightarrow (I). Supponiamo, per assurdo, che esista un sottoinsieme proprio U di $\mathbb{N}(n_0)$ tale che $n_0 \in U$ ed inoltre soddisfacente alla condizione (b). Sia $T := \mathbb{N}(n_0) \setminus U$. L'insieme T è non vuoto (perché abbiamo supposto che $U \subsetneq \mathbb{N}(n_0)$), allora per (BO), deve esistere un primo elemento t in T . Ovviamente $n_0 < t$, perché $n_0 \in U$. Quindi l'insieme non vuoto degli elementi di $\mathbb{N}(n_0)$ che precedono t , deve essere contenuto in U , in particolare $t-1 \in U$. Quindi, per la proprietà (b), dobbiamo avere che $(t-1)+1 = t \in U$ e ciò contraddice l'assunto. \square

1. Esercizi e Complementi

1.1. Mostrare che:

(a) Se $n \in \mathbb{N}$, allora:

$$n < 1 \Leftrightarrow n = 0.$$

(b) Se $n, m \in \mathbb{Z}$, allora:

$$n < m \Leftrightarrow n + 1 \leq m.$$

[Suggesto. (a, \Rightarrow) Supponiamo, per assurdo, che esista un $x \in \mathbb{N}$, tale che $0 < x < 1$. Allora, moltiplicando per x (> 0), abbiamo che $0 < x^2 < x < 1$. Quindi, iterando il procedimento, per ogni $k \geq 1$, avremmo:

$$0 < \dots < x^k < x^{k-1} < \dots < x^2 < x < 1.$$

Dunque, il sottoinsieme $S := \{x^k : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$ non possiede un primo elemento. Ciò contraddice il Principio del Buon Ordinamento (**BO**). (a, \Leftarrow) è banale.

(b, \Rightarrow) Se $n < m$, allora $m - n > 0$. Se, per assurdo, $n + 1 \not\leq m$, allora $m < n + 1$, quindi $0 < m - n < 1$. Ciò contraddice il precedente punto (a).

(b, \Leftarrow) è banale.]

1.2. (Proprietà archimedeo dell'insieme \mathbb{Z} , Archimede (III Sec. A.C.))

Mostrare che: *Presi comunque $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, allora esiste sempre un intero $n \in \mathbb{Z}$ in modo tale che:*

$$a < nb.$$

[Suggesto. Se, per assurdo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha che $a \geq nb$, allora il sottoinsieme $S := \{a - nb : n \in \mathbb{Z}\}$ di \mathbb{N} deve possedere un primo elemento $s_0 := a - n_0 b$ (Principio del Buon Ordinamento (**BO**)). Sia $s := a - (n_0 + 1)b \in S$. Allora, $s = s_0 - b$ (con $b > 0$ per ipotesi), quindi $s < s_0$. Ciò contraddice la proprietà di minimalità di s_0 .]

1.3. . Siano $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Dimostrare le seguenti:

(a) *Proprietà di compatibilità della somma rispetto alla relazione di ordine:*

$$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z;$$

(b) *Proprietà di compatibilità del prodotto rispetto alla relazione di ordine:*

$$x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz;$$

$$x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz.$$

(c) **Legge di cancellazione in \mathbb{Z} :**

$$xz = yz, z \neq 0 \Leftrightarrow x = y.$$

[Suggesto. Le proprietà (a) e (b) discendono immediatamente dalla definizione della relazione " $<$ " in \mathbb{Z} (e, dunque, dalla definizione di " $<$ " in \mathbb{N}).

(c, \Leftarrow) è banale (qualunque sia $z \in \mathbb{Z}$). (c, \Rightarrow) segue facilmente (ragionando per assurdo) da (b).]

1.4. **Metodo di Prova per Induzione (II forma).** Mostrare la validità del seguente enunciato:

Supponiamo che, dato un intero $n_0 \in \mathbb{Z}$, per ogni intero $n \geq n_0$, si possa formulare una proposizione $\mathbf{P}(n)$. Se:

- (a) $\mathbf{P}(n_0)$ è vera (**Base dell'Induzione**);
 (b) per un qualsiasi intero h , con $n_0 \leq h \leq k$, si ha che:
 $\mathbf{P}(h)$ è vera $\Rightarrow \mathbf{P}(k+1)$ è vera (**Passo Induttivo**);

allora la proposizione $\mathbf{P}(n)$ è vera per un qualunque $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$.

[Suggestimento. Basta applicare la formulazione (**IA**) del Principio di Induzione all'insieme $V := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0, \mathbf{P}(n) \text{ è vera}\}$.]

1.5. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

- (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.
 (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.
 (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$.

[Suggestimento. È immediato che le formule precedenti sono verificate per $n = 1$ (**Base dell'Induzione**). Procediamo, ora, nel dimostrare il *Passo Induttivo*.

- (a) Se $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, allora $1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
 (b) Se $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$, allora $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k + (k+1)^2 = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k + k^2 + 2k + 1 = \frac{1}{3}(k+1)^3 + \frac{1}{2}(k+1)^2 + \frac{1}{6}(k+1)$.
 (c) Se $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$, allora $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (k+1)\right] = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.]

1.6. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha:

- (a) $2n \geq n + 1$.
 (b) $2^n \geq 2n$.

[Suggestimento. È immediato che le disuguaglianze precedenti sono verificate per $n = 1$ (**Base dell'Induzione**). Procediamo, ora, nel dimostrare il *Passo Induttivo*.

- (a) Se $2k \geq k + 1$, allora $2(k+1) = 2k + 2 \geq k + 1 + 2 > (k+1) + 1$.
 (b) Se $2^k \geq 2k$, allora $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geq 2 \cdot 2k \geq 2(k+1)$.]

1.7. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che per ogni $n \geq 0$ e per ogni elemento $x \neq 1$ (ad esempio, $x \in \mathbb{R}$) si ha:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \frac{x^n}{(1-x)}.$$

[Suggestimento. È immediato che la formula precedente è verificata per $n = 0$ (**Base dell'Induzione**) e per $n = 1$:

$$(1-x)^{-1} = 1 + \frac{x}{(1-x)}.$$

Passo induttivo: Se

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \frac{x^k}{(1-x)},$$

allora:

$$\begin{aligned} (1-x)^{-1} = 1 + \frac{x}{(1-x)} &= 1 + x \cdot (1-x)^{-1} = \\ &= 1 + x \cdot \left[1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \frac{x^k}{(1-x)}\right] = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + \frac{x^{k+1}}{(1-x)}. \end{aligned}$$

1.8. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che:

(a) Per ogni $n \geq 1$ e per ogni x , ad esempio $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1).$$

(b) (**Progressione Aritmetica**) Per ogni $n \geq 0$ e presi comunque x, y , ad esempio $x, y \in \mathbb{R}$, si ha:

$$x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + \dots + (x + (n - 1)y) + (x + ny) = \frac{(n + 1)(2x + ny)}{2}.$$

(c) (**Progressione Geometrica**) Per ogni $n \geq 0$ e presi comunque x e $y \neq 1$, ad esempio $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq 1$, si ha:

$$x + xy + xy^2 + xy^3 + \dots + xy^{n-1} + xy^n = \frac{x(y^{n+1} - 1)}{(y - 1)}.$$

(d) Presi comunque due interi $m \geq 0$ ed $n \geq m$ e presi comunque x e $y \neq 1$, ad esempio $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq 1$, si ha:

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \dots + xy^{n-1} + xy^n = \frac{x(y^{n+1} - y^m)}{(y - 1)}.$$

[Suggestimento. (a) Se $n = 1$ l'uguaglianza è banalmente verificata. Per $n \geq 2$, si ha:

$$\begin{aligned} (x^n - 1) &= (x + 1)(x^{n-1} - 1) - x(x^{n-2} - 1) = \\ &= (x + 1)(x - 1)(x^{n-2} + \dots + x + 1) - x(x - 1)(x^{n-3} + \dots + x + 1) = \\ &= (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

(b) Se $n = 0$ l'uguaglianza è banalmente verificata. Per $n \geq 1$, si ha:

$$\begin{aligned} [x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + \dots + (x + (n - 1)y)] + (x + ny) &= \\ = \frac{n(2x + (n-1)y)}{2} + (x + ny) &= \frac{n(2x + (n-1)y) + (2x + 2ny)}{2} \\ = \frac{(n+1)(2x + ny)}{2}. \end{aligned}$$

La dimostrazione di (c) è analoga a quella di (b).

(d) è conseguenza diretta di (c) dal momento che:

$$\begin{aligned} xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \dots + xy^{n-1} + xy^n &= \\ = (x + xy + \dots + xy^{n-1} + xy^n) - (x + xy + \dots + xy^{m-2} + xy^{m-1}). \end{aligned}$$

1.9. (Disuguaglianza di Jakob Bernoulli (1654-1705)) Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che, per ogni $n \geq 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

[Suggestimento. Se $n = 0$ la disuguaglianza è banalmente verificata. Per $n \geq 1$, si ha:

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &= (1 + x)^{n-1}(1 + x) \geq (1 + (n - 1)x)(1 + x) = 1 + nx + (n - 1)x^2 \geq \\ &\geq 1 + nx. \end{aligned}$$

1.10. (Principio di G.P. Lejeune Dirichlet (1805-1859) detto anche Principio delle “gabbie dei piccioni” ovvero Principio delle “caselle postali”)

Siano $n > m \geq 1$. Utilizzando il Metodo di Prova per Induzione, mostrare che: *Se un insieme finito con n elementi [lettere] deve essere ripartito in m sottoinsiemi [caselle postali], allora almeno un sottoinsieme [casella postale] deve contenere più di un elemento [lettera].*

[Suggerimento. Se $n \geq 2$, allora $m = 1$. In tal caso il Principio enunciato è ovvio. Supponiamo $n \geq 3$. Sia $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e sia $\mathcal{F} := \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ una famiglia di m sottoinsiemi di A , con $m < n$, $\cup_{1 \leq i \leq m} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $1 \leq i \neq j \leq m$. Supponiamo per semplicità di notazione che $a_1 \in A_1$ (altrimenti, modifichiamo gli indici degli insiemi della famiglia \mathcal{F}) e che $A_1 = \{a_1\}$ (altrimenti abbiamo concluso). Poniamo $A' := A \setminus \{a_1\}$ e $\mathcal{F}' := \{A_2, \dots, A_m\}$. Applicando l'ipotesi induttiva ad A' ed \mathcal{F}' concludiamo facilmente.]