

Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 6 – Andrea Cova (14 novembre 2003)

1. (a) Provare che, per ogni n dispari:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \equiv 0 \pmod{n}$$

- (b) Dire quali condizioni si devono avere affinché, per n dispari, si abbia:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \equiv 0 \pmod{n}$$

2. Dimostrare che non esistono $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tali che:

$$a^2 + b^2 = 4c - 1$$

3. (a) Mostrare che, se p e q sono primi distinti, per ogni $a \in \mathbf{Z}$ tale che
 $a^p \equiv a \pmod{q}$ e $a^q \equiv a \pmod{p}$, allora:

$$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$$

- (b) Mostrare che, se p e q sono primi distinti e $a \in \mathbf{Z}$, allora:

$$a^{pq} \equiv a^{p+q-1} \pmod{pq}$$

4. Trovare il più piccolo intero $a > 2$ tale che:

$$2 \mid a, 3 \mid (a + 1), 5 \mid (a + 3), 7 \mid (a + 5)$$

5. Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

$$3X \equiv 4 \pmod{5}$$

$$6X \equiv 9 \pmod{12}$$

$$7X \equiv 2 \pmod{13}$$

$$2x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{5}$$