Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica a.a. 2002/2003
ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 2 - Andrea Cova (10 ottobre 2003)

1. Siano $x, y, z \in \mathbf{Z}$ con $z \neq 0$. Mostrare che:

   $xz = yz \Leftrightarrow x = y$, (*legge di cancellazione*).

2. Per ogni $x \in \mathbf{R}$, sia $|x|$ il *valore assoluto* (o *modulo*) di x, così definito:

   $|x| :=$ x, se $x \geq 0$
   -x, se $x < 0$.

   Mostrare che, presi comunque $x, y, z \in R$,
   (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
   (b) $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

3. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si definisca *parte intera* di x, in simboli $[x]$, il più grande intero di $\mathbf{Z}$ minore o uguale ad x. Mostrare che, per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{Z}$
   (a) $0 \leq x - [x] < 1$;
   (b) $[n + x] = n + [x]$;
   (c) presi comunque $x, y \in \mathbf{R}^+$:

   $$[x + y] \geq [x] + [y]$$
   $$[xy] \geq [x]\,[y]$$

4. Dimostrare per induzione le seguenti proposizioni:
   (a) per $n \geq 1 : 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = ((n(n+1))/2)^2$
   (b) per $n \geq 0 : 2^n \geq n + 1$
   (c) per $h \in \mathbf{R}$, per $n \geq 1 : (1 + h)^n \geq 1 + nh$, (*disuguaglianza di Bernoulli)*

5. Dimostrare che:
   (a) se $x \in \mathbf{N}$,

   $$x < 1 \Leftrightarrow x = 0$$

   (b) fissato $n \in \mathbf{Z}$, se $x \in \mathbf{Z}$:

   $$x > n \Leftrightarrow x \geq n + 1$$

6. Mostrare che, presi comunque $a, b \in \mathbf{Z}$ con $b \neq 0$, esiste $n \in \mathbf{Z}$ con $a < nb$, (*Proprietà Archimedea di **Z***).

7. Mostrare che presi $a, b, c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$:
   (a) MCD (a, MCD(b, c)) =MCD(a, b, c) = MCD (MCD(a, b), c);
   (b) MCD(a, 1) = 1;
   (c) MCD(ab, ac) = $|a|$* MCD(b, c);
   (d) MCD(a, b) = d $\Rightarrow$ MCD (a/d,b/d) = 1;
   (e) MCD(a, b) = 1 = MCD(b, c) $\Leftrightarrow$ MCD(a, bc) = 1;
   (f) MCD(a, b) = MCD($|a|$, $|b|$);
   (g) se $b \neq 0$ e $a = bq + r$, con $0 \leq r < |b|$, allora:

   MCD(a, b) =MCD(b, r).