Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004
AC1 - Analisi Complessa
Tutorato 4
Martedì 23 marzo 2004

1. Sia f una funzione intera (= olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) non costante. Si dimostri che l'immagine di f è densa in $\mathbb{C}$.

2. Una funzione olomorfa f si dice periodica di periodo w se $f(z+w) = f(z)$ per ogni z in cui f è definita.
Supponiamo f olomorfa e periodica con tre periodi w_1, w_2, w_3 linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$. Dimostrare che f è costante.
Suggerimento: provare che esistono elementi w di modulo arbitrariamente piccolo e scrivibili come combinazione lineare a coeff. interi dei w_i.

3. Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disco aperto centrato nell'origine. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Δ t.c. $f(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che f non può esistere.

4. Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disco aperto centrato nell'origine. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in $\Delta - \{0\}$. Che tipo di singolarità avrà $1/f$ in un intorno di 0?

5. Calcolare i residui delle seguenti funzioni nei punti a fianco indicati:
   (a) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ $z_0 = \pi$
   (b) $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}$ $z_0 = 1$
   (c) $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ $z_0 = 1$
   (d) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ $z_0 = \pi$

6. Sia γ il rettangolo di vertici $0, 4i, 10+4i, 10$ percorso in senso orario. Usando il teorema dei residui, calcolare i seguenti integrali:
   (a) $\int_\gamma \frac{1}{z^2-3z+5}\, dz$
   (b) $\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1}\, dz$
   (c) $\int_\gamma \frac{1}{z^2-z+1}\, dz$

7. Classificare, se ha senso, le singolarità delle seguenti funzioni:
   (a) $f(z) = \frac{|z|^2}{z}$
   (b) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$
   (c) $f(z) = e^{-(\frac{1}{z})}$
   (d) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$
   (e) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$