**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2003/2004**
**AC1 - Analisi Complessa**
**Tutorato 3**
Giovedì 11 marzo 2004

1. Sia $\Delta \subset \mathbb{C}$ un disco centrato nell'origine. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in $\Delta - \{0\}$ t.c. $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$. Si mostri che l'integrale di $f(z)$ su ogni curva chiusa in $\Delta - \{0\}$ è nullo.

2. Dimostrare che una funzione intera (cioè olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) che soddisfa $|f(z)| < |z|^n$ per qualche $n$ e $|z|$ suff. grande è un polinomio.

3. Dimostrare che se due serie di potenze $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ in un intorno $U$ di 0 convergono alla stessa funzione, allora $a_n = b_n$ $\forall n$.

4. Calcolare i seguenti integrali lungo le curve specificate:

   (a) $\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

   (b) $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\, dz \quad \gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

   (c) $\int_\gamma z^2 + 3z\, dz \quad \gamma(t) = \sin^3(t)\cos(t) + i\sqrt{t}\sqrt{2\pi}, \quad t \in [0, 2\pi]$

   (d) $\int_\gamma \overline{z}^2\, dz \quad \gamma(t) = e^{it}\ t \in [0, 2\pi]$

   (e) $\int_\gamma \frac{z^2}{z-1}\, dz \quad \gamma(t) = 3e^{it}\ t \in [0, 2\pi]$

   (f) $\int_\gamma \left(\frac{z-2}{2z-1}\right)^3 dz \quad \gamma(t) = e^{it}\ t \in [0, 2\pi]$

   (g) $\int_\gamma Re(z)\, dz \quad \gamma(t) = e^{-it}\ t \in [0, 2\pi]$