Regole per il calcolo dei residui

Anna Scaramuzza

15/03/2004

Ricordiamo che

$$Res(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$$

dove $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\gamma = \partial D$ e D è un disco tale che $\dot{\overline{D}} \in \Omega$.
Se $f(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent allora

$$f(z) = \sum_h c_h(z-a)^h$$

e vale che

$$Res(f,a) = c_{-1}$$

Siano $g(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $h(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $h(a) = 0$. Definiamo:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

allora $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega')$, dove con Ω' denotiamo $\Omega' = \Omega - \{a\}$. Supponiamo che a sia uno zero semplice per $h(z)$, allora possiamo dire che esiste $\phi(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ opportuna tale che:

$$f(z)(z-a) = \phi(z)$$

Poiché $\phi(z)$ è olomorfa, possiamo svilupparla in serie di Laurent, allora

$$f(z)(z-a) = c_{-1} + (z-a)\psi(z)$$

ma

$$\begin{aligned} f(z)(z-a) &= \frac{g(z)}{h(z)}(z-a) \\ &= \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} \lim_{z\to a} f(z)(z-a) &= c_{-1} \\ &= \frac{g(a)}{h'(a)} \end{aligned}$$

dove h' denota la derivata prima di h rispetto a z.

Più in generale se $f(z)$ ha un polo di ordine m in $z = a$ allora

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \ldots$$

se moltiplichiamo per $(z-a)^m$ abbiamo che:

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + (z-a)c_{1-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \ldots$$

Derivando $m-1$ volte eliminiamo tutti i coefficienti c_j per $j > m$ e otteniamo:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(f(z)(z-a)^m\Big) = (m-1)!c_{-1} + (z-a)\psi(z)$$

ovvero

$$c_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big(f(z)(z-a)^m\Big)$$