AC1 Prova scritta

15 giugno 2004

1. Calcolare, per $a > b > 0$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} \ .$$

2. Calcolare, per $m \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx \ .$$

3. Discutere la natura della singolarità in 0 delle seguenti funzioni:

$$\frac{\sin z}{z}\,, \quad \frac{z}{\sin z}\,, \quad \frac{\sin^2 z}{z}\,, \quad \frac{z}{\sin^2 z}\,, \quad \frac{z}{\sin z^2}\,, \quad \sin\frac{1}{z}\,.$$

4. Trovare, se esiste, una mappa conforme biettiva f tra le seguenti regioni:

(a) $A := \{z = x + iy\,, \quad x > y > 0\} \xrightarrow{f} \{\operatorname{Re} z > 0\}$

(b) $A \xrightarrow{f} U$,

(c) come in (b) con f lineare fratta,

(d) $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \xrightarrow{f} U$,

(e) come in (d) con f lineare fratta tale che $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1+i}{2}$

(f) $\{|z| > 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

N.B. nel caso tale mappa non esista... dimostrarlo!

5. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una regione semplicemente connessa. Sia

$\mathcal{C} := \{C \subseteq \mathbb{C},\ C$ chiuso connesso non vuoto tale che $\Omega \setminus C$ è una regione$\}$.

Caratterizzare i $C \in \mathcal{C}$ tali che $\Omega \setminus C$ è ancora semplicemente connesso.

6. Mostrare che

$$\sin\pi(z+\alpha) = e^{\pi z \cot \pi\alpha} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n+\alpha}\right) e^{-z/(n+\alpha)}$$

N.B. Qui $U := \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| < 1\}$. Una regione è un aperto connesso non vuoto.