Esercizi AC1

Anna Scaramuzza

10/05/2004

Esercizio 1. Sia C una curva del piano z di equazioni parametriche $x = F(t)$ e $y = G(t)$. Dimostrare che la trasformazione

$$z = F(w) + iG(w)$$

rappresenta la curva C sull'asse reale del piano complesso w.

Soluzione. Supponiamo che $z = x+iy$ e che $w = u+iv$ allora $z = x+iy = F(u+iv) + iG(u+iv)$. L'asse reale è descritta da $v = 0$ allora $x + iy = F(u) + iG(u)$ cioé:

$$\begin{cases} x = F(u) \\ y = G(u) \end{cases} \tag{1}$$

da cui si vede che la curva che viene rappresentata sull'asse reale è proprio C.

Esercizio 2.

1. Determinare la rappresentazione che trasforma l'ellisse nel piano complesso z di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sull'asse reale del piano w.

2. Determinare una rappresentazione che trasforma una cicloide nel piano complesso z di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{2}$$

sull'asse reale del piano w.

Soluzione.

1. Consideriamo la seguante parametrizzazione dell'ellisse:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \tag{3}$$

dove $a > 0$ e $b > 0$. Per l'esercizio precedente, è sufficiente utilizzare la trasformazione

$$z = a\cos w + i\sin w$$

2. Poiché la cicloide è data in forma parametrica allora è sufficiente considerare

$$z = a(w - \sin w) + ia(1 - \cos w) = a(w + i - ie^{-iw})$$

Osservazione 1. Si può trovare un'equazione parametrica della cicloide nel modo che segue.
Consideriamo il cerchio generatore, che per comodità supporremo di raggio 1, ad un punto del suo percorso. Se indichiamo con P il punto sulla curva, di coordinate (x, y), e con t la misura (in radianti) dell'angolo PB, uguale alla lunghezza dell'arco PB, risulta $AB = PB$, $BC = PQ$ e $PC = BQ$. Si ha allora:

$$\begin{array}{lllllllll} x & = & AC & = & AB - BC & = & t - PQ & = & t - sen\ t \\ y & = & PC & = & QB & = & OB - OQ & = & 1 - cos\ t \end{array}$$

Quando il cerchio fa un giro intero, la lunghezza t varia tra 0 e $2p$; il punto di coordinate $(t - sent, 1 - cost)$ descrive la cicloide.

Esercizio 3. Si dimostri che la trasformazione $w = (z - i)/(iz - 1)$ rappresenta la regione a parte immaginaria positiva sulla regione $|w| \leq 1$.

Soluzione. Per dimostrare la tesi computiamo il modulo $|w|$:

$$\left|w\right| = \frac{\left|z - i\right|}{\left|iz - 1\right|}$$

Supponiamo che $z = x + iy$ allora $z - i = x + i(y - 1)$, $iz - 1 = -y - 1 + ix$ e

$$\begin{aligned} \left|z - i\right| &= \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \\ \left|iz - 1\right| &= \sqrt{x^2 + (-y - 1)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \end{aligned}$$

quindi $\left|iz - 1\right| \geq \left|z - i\right|$ e $\left|w\right| \leq 1$.

Esercizio 4. Determinare una trasformazione bilineare fratta che rappresenti i punti $z = i, z = -i, z = 1$ del piano complesso z nei punti $w = 0, w = 1, w = \infty$.

Soluzione. Dobbiamo determinare una trasformazione bilineare fratta del tipo $w = az + b/cz + d$ tale che:

$$\frac{ai + b}{ci + d} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{-ai + b}{-ci + d} = 1 \tag{5}$$

$$\lim_{z \to 1} \frac{az + b}{cz + d} = \infty \tag{6}$$

La (6) ci dice che $cz + d\big|_{z=1} = c + d = 0$ quindi

$$\begin{aligned} b &= -ai \\ -2ai &= d(i + 1) \\ c &= -d \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} b &= \frac{d(i + 1)}{2} \\ a &= \frac{d(i + 1)}{-2i} \\ c &= -d \end{aligned}$$

Da questo segue che la trasformazione cercata è

$$w = \frac{\frac{d(i+1)z}{-2i} + \frac{d(i+1)}{2}}{(dz-d)} = \frac{(i+1)}{2i}\frac{z-i}{z-1}$$

Esercizio 5. Dimostrare che due trasformazioni bilineari fratte successive determinano ancora una trasformazione bilineare fratta. Dedurre, poi, che n trasformazioni bilineari fratte successive determinano un'unica trasformazione bilineare fratta.

Soluzione. Supponiamo che la trasformazione bilineare fratta che rappresenta il piano ξ sul piano z sia:

$$z = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

e che quella che rappresenta il piano z sul piano w sia:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Allora la composizione di queste due trasformazioni è:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \\ &= \frac{\alpha \frac{a\xi+b}{c\xi+d} + \beta}{\gamma \frac{a\xi+b}{c\xi+d} + \delta} \\ &= \frac{\frac{\alpha a\xi + b\alpha + c\beta + \beta d}{c\xi+d}}{\frac{a\gamma\xi + b\gamma + \delta c\xi + \delta d}{c\xi+d}} \\ &= \frac{\alpha a\xi + \alpha b + c\beta\xi + \beta d}{a\gamma\xi + b\gamma + \delta c\xi + \delta d} \\ &= \frac{(\alpha a + c\beta)\xi + (b\alpha + \beta d)}{(a\gamma + \delta c)\xi + (b\gamma + \delta d)} \end{aligned}$$

che è ancora una trasformazione bilineare.
Per dimostrare che n trasformazioni successive determinano un'unica trasformazione bilineare fratta si procede per induzione.

Esercizio 6. Siano a e b due punti fissi distinti di una trasformazione bilineare: dimostrare che può essere scritta nella forma:

$$\frac{w-a}{w-b} = K \cdot \frac{z-a}{z-b}$$

dove K è una costante.

Soluzione. Supponiamo che la trasformazione bilineare fratta sia:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = f(z)$$

e che $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(w) = z$, $f(d) = c$. Consideriamo il birapporto tra w, a, b, c e scriviamolo in termini di z, a, b, d:

$$\frac{(w-a)(c-b)}{(w-b)(c-a)} = \frac{(z-a)(d-b)}{(z-b)(d-a)}$$

da cui

$$\frac{(w-a)}{(w-b)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-b)(d-a)}\frac{(z-a)}{(z-b)}$$

Ponendo

$$K = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-b)(d-a)}$$

si ottiene quanto si voleva.

Esercizio 7. Dimostrare che per poligoni chiusi la somma degli esponenti che compaiono nella trasformazione di Schwarz-Christoffel è pari a -2.

Soluzione. In generale vale che la somma degli angoli esterni di un poligono chiuso è 2π. Quindi:

$$\big(\pi-\alpha_1\big)+\ldots+\big(\pi-\alpha_n\big)=2\pi$$

dividendo per π:

$$\left(1-\frac{\alpha_1}{\pi}\right)+\ldots+\left(1-\frac{\alpha_n}{\pi}\right)=2$$

da cui la tesi.

Esercizio 8. Dimostrare che se nella trasformazione di Schwarz-Christoffel uno dei punti è scelto all'infinito allora manca l'ultimo fattore.

Soluzione. Poniamo $A = K/(-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$ allora la trasformazione di Schwarz-Christoffel si può mettere nella forma

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= A(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}\\ &= A(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}\ldots\left[(-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}\left(\frac{x_n-z}{x_n}\right)\right]^{\alpha_n/\pi-1}\\ &= K(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}\ldots\left(\frac{x_n-z}{x_n}\right)^{\alpha_n/\pi-1}\end{aligned}$$

Passando al limite per $x_n\to\infty$ otteniamo che l'ultimo fattore tende a 1 e quindi la trasformazione è

$$\frac{dw}{dz} = K(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}\ldots\left(\frac{x_n-z}{x_n}\right)^{\alpha_n/\pi-1}$$

Esercizio 9. Determinare quali sono le condizioni cui devono soddisfare $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ perché la trasformazione bilineare fratta

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

sia involutiva.

Soluzione. Ricordiamo che

Definizione 1. Una trasformazione T è involutiva se $T^2 = T\circ T = id$ ovvero se $T = T^{-1}$.

quindi dobbiamo verificare:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\alpha\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}+\beta}{\gamma\frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta}+\delta} \\ &= \frac{\frac{\alpha^2 w+\alpha\beta+\gamma\beta w+\beta\delta}{\gamma w+\delta}}{\frac{\gamma\alpha w+\gamma\beta+\delta\gamma w+\delta^2}{\gamma w+\delta}} \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:

$$\alpha^2+\gamma\beta = 1 \tag{7}$$
$$\alpha\beta+\beta\delta = 0 \tag{8}$$
$$\gamma\alpha+\delta\gamma = 0 \tag{9}$$
$$\gamma\beta+\delta^2 = 1 \tag{10}$$

Poiché la trasformazione è una trasformazione bilineare fratta allora $\gamma \neq 0$ quindi (9) implica che $\alpha = -\delta$. Questa uguaglianza ci dice che (8) è automaticamente soddisfatta e che (7=10).

Esercizio 10. Si dimostri che la trasformazione bilineare fratta

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

è involutoria.

Soluzione. Dobbiamo verificare che

$$w = \frac{\frac{w+1}{w-1}+1}{\frac{w+1}{w-1}-1}$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\frac{w+1}{w-1}+1}{\frac{w+1}{w-1}-1} &= \frac{\frac{w+1+w-1}{w-1}}{\frac{w+1-w+1}{w-1}} \\ &= w \end{aligned}$$