Tutorato

30/5/2003

Esercizio 1. Siano $X_1 \dots X_n$ indipendenti estratti da una popolazione di tipo $N(\mu, \sigma^2)$ con μ e σ^2 incogniti. Si vuole verificare che $H_0 : \sigma^2 = 1$ contro l'ipotesi $H_1 : \sigma^2 > 1$. Si calcoli la zona di rifiuto come funzione di s^2 per un test di ampiezza α attraverso il rapporto delle verosimiglianze generalizzato. Secondo voi, quello che avete trovato è un test UMP? Motivare la risposta.

Esercizio 2. A partire dall'esercizio precedente calcolare il relativo intervallo di confidenza unilaterale per σ^2 a livello $1 - \alpha$.

Esercizio 3. Calcolare gli stimatori dei minimi quadrati per α e β per un modello del tipo:

$$Y = \alpha x^\beta \epsilon.$$

Supponendo che $E(\log \epsilon) = 0$ e $Var(\log \epsilon) = \sigma^2$ verificare la correttezza degli stimatori dei minimi quadrati di $\log \alpha$ e β.

Esercizio 4. In un modello di regressione lineare dimostrare che:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}).$$

Esercizio 5. Siano $X_1 \dots X_n$ indipendenti estratti da una $Gamma(2, 1/\theta)$, ovvero:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(0,\infty)}(x) \qquad \text{con } \theta > 0.$$

Calcolare la distribuzione d probabilità di $Z = \frac{2\sum X_i}{\theta}$ e verifiare se è una quantità pivotale. Costruire, inoltre, gli intervalli di confidenza unilaterali e bilaterali per θ a livello $1 - \alpha$.

Esercizio 6. Siano $X_1 \dots X_n$ indipendenti estratti da una $U(0, \theta)$:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) \qquad \text{con } \theta > 0.$$

Utilizzando la statistica $Y = X_{(n)} = \max\{X_1 \dots X_n\}$ verificare che $Z = -2n \log(\frac{Y}{\theta})$ è una quantità pivotale per θ e costruire gli intervalli di confidenza unilaterali e bilaterali a livello $1 - \alpha$.