Lezione n.1: La probabilità soggettiva

Roma, 25 febbraio 2003

Brunero Liseo
Dipartimento di studi geoeconomici, linguistici, statistici e storici
per l'analisi regionale
Università di Roma "La Sapienza"
Rome, Italy
`brunero.liseo@uniroma1.it`
`tel. 06-49766110`

La probabilità soggettiva

Definizione 1 *Un evento, o la proposizione che lo esprime, è una entità logica capace di assumere due sole modalità :* **vero** *oppure* **falso***.*

Esempio []: La proposizione **Lo studente G.G. supererà l'esame SM1 con il voto di 27/30 entro il febbraio 2004** è un evento: si potrà infatti verificare tra un anno se l'evento è vero o falso

Definizione 2 *La probabilità di E, per un dato individuo, in un certo momento della sua vita e sulla base di un certo insieme di informazioni, è il prezzo $p = P(E)$ che si ritiene giusto pagare per partecipare ad una scommessa in cui si incassa 1 se si verifica E e 0 se E non si verifica.*

Definizione 3 *Una valutazione di probabilità sugli eventi* $E_1, E_2, \cdots, E_k$ *si dice coerente se nessuna combinazione di scommesse consente di realizzare un guadagno non negativo in ognuno dei casi possibili che si possono verificare, e positivo in almeno uno di essi.*

Data una scommessa di quota p ed importo S su un evento E, il guadagno dello scommettitore può essere

- $G(E) = S - pS = (1-p)S$ se E si verifica
- $G(\bar{E}) = -pS$ se E non si verifica

Teorema 1 *C.N.S. per la coerenza è di attribuire a* $P(E)$ *un unico valore tale che* $0 \leq P(E) \leq 1$. *In particolare,* $P(E) = 1$ *se* E *è certo e* $P(E) = 0$ *se* E *è impossibile*

Dimostrazione 1 *Se è vero E il guadagno è $G(E) = (1-p)S$, altrimenti è $G(\bar{E}) = -pS$.*

Se $p < 0$, si ha $(1-p) > 0$ e basta avere $S > 0$ per ottenere comunque un guadagno positivo.

Se $p > 1$, si ha $(1-p) < 0$ e basta avere $S < 0$ per ottenere comunque un guadagno positivo.

Dunque $0 \leq P(E) \leq 1$. Se poi E è certo allora l'unico caso possibile è $G(E) = (1-p)S$ e per non avere guadagni certi deve essere $p = 1$. La condizione è , banalmente, anche sufficiente. Analogo ragionamento conduce a $p = 0$ per eventi impossibili.

Infine p deve essere un valore unico: per assurdo supponiamo che esistano p_1 e p_2 diversi tra loro. Effettuiamo due scommesse di posta S_1 e S_2. I guadagni *saranno*

$$G(E) = (1 - p_1)S_1 + (1 - p_2)S_2, \quad G(\bar{E}) = -p_1 S_1 - p_2 S_2$$

Il determinante dei coefficienti delle due relazioni su S_1 *e* S_2 *è pari a* $p_1 - p_2$, *e per fare in modo che i due guadagni non siano entrambi positivi (incoerenza...) occorre che* $p_1 - p_2 = 0$.

Legge delle probabilità totali

Teorema 2 *Dati gli eventi $E_1, E_2, \cdots, E_k$, a due a due incompatibili si ha*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P\left(E_i\right).$$

Dimostrazione 2 *Sia $E_0 = \overline{\bigcup_{i=1}^{k} E_i}$; allora $E_0, E_1, \cdots, E_k$ rappresentano una partizione dell'evento certo. Siano inoltre $p_j = P(E_j)$, e $S_j, j = 1, \cdots, k$, le probabilità e le poste puntate.*

Se si verifica E_j, il guadagno è
$G_j = S_j - \sum_{h=0}^{k} p_h S_h, \quad j = 0, 1, \cdots, k.$

Le $k+1$ equazioni formano un sistema lineare nelle $k+1$ incognite S_j. Per rispettare il vincolo di coerenza è *necessario che il determinante sia nullo: se così non fosse potremmo fissare i guadagni tutti positivi e poi determinare la soluzione* $S_0, S_1, \cdots, S_k$ *corrispondente.*

Il determinante è

$$\begin{vmatrix} (1-p_0) & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_k \\ -p_0 & (1-p_1) & -p_2 & \cdots & -p_k \\ -p_0 & -p_1 & (1-p_2) & \cdots & -p_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & (1-p_k) \end{vmatrix}$$

$$= 1 - (p_0 + p_1 + \cdots + p_k)$$

da cui si evince che deve essere $\sum_{j=0}^{k} p_j = 1$

La condizione è anche sufficiente per la coerenza poiché:

$$p_j G_j = p_j S_j - p_j \sum_{h=0}^{k} p_h S_h, \qquad j = 0, 1, ...k,$$

cioè

$$\sum_{j=0}^{k} p_j G_j = \sum_{j=0}^{k} p_j S_j - \sum_{j=0}^{k} p_j \sum_{h=0}^{k} p_h S_h,$$

Se la somma delle probabilità è 1, risulta $\sum_{j=0}^{k} p_j G_j = 0$ e dunque non ci possono essere guadagni tutti positivi (coerenza assicurata).

E' elementare dedurre da quanto sopra (considerando la partizione $\{E_0, \bigcup_{i=1}^{k} E_i\}$ che

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 - P(E_0) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)$$

Attraverso lo schema delle scommesse, la condizione di coerenza permette di dire che tutte e sole le leggi di probabilità ammissibili sono quelle che soddisfano i seguenti requisiti

1. Ad ogni evento E, si associa una probabilità $P(E) \in [0,1]$
2. Se Ω è l'evento certo $P(\Omega) = 1$.
3. Se $E_1, E_2, \cdots, E_k$ sono incompatibili a due a due allora

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P\left(E_i\right).$$

La probabilità condizionata

E' in questo ambito che la costruzione soggettiva si differenzia maggiormente da quella classica. Nell'approccio basato sulle scommesse, le due valutazioni

$$P(E), \qquad P(E \mid F)$$

sono diverse perché effettuate sulla base di due diversi livelli di informazione da parte di chi effettua la scommessa. In quest'ottica $P(E \mid F)$ è la misura del grado di fiducia che un soggetto ha sul verificarsi di E, nell'ipotesi che F si sia verificato.
Come assegnare le probababilità agli eventi del tipo $E \mid F$?
Cominciamo a definire gli eventi di questo tipo

Definizione 4 *L'evento E, subordinato a F, è definito come l'evento $E \mid F$ tale che*

- *è vero se si verificano* E *e* F*;*
- *è falso se si verifica* F *ma non* E*;*
- *non ha valore logico se* F *non si verifica.*

Che relazione sussiste tra $P(E)$ e $P(E \mid F)$? Occorre utilizzare il cosiddetto teorema delle probabilità composte. Assumiamo che

$$p = P(E \mid F), \quad q = P(F), \quad r = P(E \cap F)$$

e siano S_{cond}, S_F, e S_{int} le poste relative alle scommesse sui corrispondenti eventi Consideriamo i possibili guadagni

- $G(E \cap F) = S_F + S_{int} + S_{cond} - (qS_F + rS_{int} + pS_{cond}) = S_{cond}(1-p) + S_{int}(1-r) + S_F(1-q)$;
- $G(\bar{E} \cap F) = S_F - (qS_F + rS_{int} + pS_{cond}) = -pS_{cond} - rS_{int} + S_F(1-q)$;
- $G(\bar{F}) = -rS_{int} - qS_F$

Se il determinante del sistema associato alle tre equazioni in S_F, S_{int}, S_{cond} fosse diverso da zero potremmo fissare i guadagni positivi e determinare le quote necessarie per avere una situazione di incoerenza. L'unico modo per evitare questo è che il determinante sia nullo. Il deterrminante è

$$\begin{vmatrix} 1-p & 1-r & 1-q \\ -p & -r & 1-q \\ 0 & -r & -q \end{vmatrix}$$

$$= r - pq.$$

Dunque deve essere

$$r = P(E \cap F) = pq = P(E \mid F)P(F)$$

Tale uguaglianza, oltre che necessaria, è sufficiente per la coerenza: infatti moltiplicando i seguenti tre guadagni per le rispettive probabilità si ha

$$G(E \cap F)P(E \cap F) + G(\bar{E} \cap F)P(\bar{E} \cap F) + G(\bar{F})P(\bar{F}) =$$

$$G(E \cap F)pq + G(\bar{E} \cap F)(1-p)q + G(\bar{F})(1-q) = ... = S_{int}(pq - r).$$

e se vale la condizione il guadagno atteso è nullo.

Dunque vale il seguente teorema

Teorema 3 *C.N.S. affinché la misura di probabilità sia coerente è*

$$P(E \cap F) = P(F)P(E \mid F);$$

se poi $P(F) > 0$, *allora*

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Dimostrazione 3 *Già fatta.*

Se accade che $P(E \mid F) = P(E)$, allora la conoscenza di F non influenza il nostro grado di fiducia nel verificarsi di E. Risulta allora

$$P(E \cap F) = P(F)P(E);$$

e i due eventi si dicono **stocasticamente indipendenti**

Il teorema di Bayes

Il teorema delle probabilità composte è alla base del teorema di Bayes.

Teorema 4 *Sia* $H_1, H_2, \cdots, H_n$ *un insieme di eventi a due a due incompatibili con probabilità assegnate* $p_1, p_2, \cdots, p_n$. *Sia inoltre* $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} H_j$ *tale che* $P(B) > 0$ *e supponiamo che siano note le probabilità condizionate* $P(B \mid H_j)$, $j = 1, \cdots, n$. *Allora, per ogni* $j = 1, \cdots, n$

$$P\left(H_j \mid B\right) = \frac{P(H_j)P(B \mid H_j)}{\sum_{h=1}^{k} P(H_h)P(B \mid H_h)}$$

Dimostrazione 4

$$P(H_j \mid B) = \frac{P(B \cap H_j)}{P(B)} = \frac{P(B \mid H_j)P(H_j)}{P(B)};$$

Inoltre, essendo $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} H_j$

$$B = B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} H_j \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (B \cap H_j)\,,$$

e

$$P(B) = \sum_{h=1}^{n} P\left(B \cap H_j\right) = \sum_{h=1}^{n} P\left(B \mid H_j\right) P\left(H_j\right).$$

da cui la tesi

Differenze con l'impostazione classica

L'impostazione assiomatica di Kolmogorov prevede:
Sia $\mathcal{A}$ una $\sigma - algebra$

- Ad ogni $E \in \mathcal{A}$ si associa un numero reale $P(E) \in [0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Per ogni successione $E_1, E_2, \cdots$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due incompatibili si ha

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j)$$

La differenza sostanziale è che la terza proprietà è assicurata dallo schema delle scommesse solo per successioni di eventi finite, e per questo la misura è definita su un'algebra (non una $\sigma - algebra$)

Non si può ottenere la completa additività con un semplice passaggio al limite

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)$$

Lo scopo della terza assunzione di Kolmogorov è la possibilità di utilizzare la teoria della misura, ma non è giustificata dallo schema delle scommesse.