Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 21/5/2003

9.1 Sia C un sottoinsieme compatto in $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$. Verificare che $Fr(C)$ è compatto.

9.2 Siano $a \lneq b$ punti della retta euclidea. Dimostrare che $X := [a, b] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto trovando un ricoprimento aperto di X che non possiede un sottoricoprimento finito.

9.3 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico metrizzabile.

(i) Verificare che ogni sottoinsieme compatto C di $(X, \mathcal{T})$ è chiuso e limitato.

(ii) Verificare che esistono sottoinsiemi chiusi e limitati di uno spazio metrizzabile $(X, \mathcal{T})$ che non sono compatti.

9.4 Verificare che l'insieme $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ delle matrici quadrate ortogonali di ordine n è un sottoinsieme compatto in $(\mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \mathcal{T}_e)$, dove $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici quadrate di ordine n e dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^{n^2}$ tramite l'isomorfismo $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

9.5 Determinare un esemipio di spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ tale che:

(i) $(X, \mathcal{T})$ ha un sottoinsieme compatto non chiuso.

(ii) $(X, \mathcal{T})$ ha un sottoinsieme compatto con chiusura non compatta.

9.6 Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto per ogni $n \geq 1$.