Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 7/5/2003

7.1 Determinare quali tra i seguenti spazi sono T_2:
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$; $(\mathbb{R}, i_s)$; $(\mathbb{R}, j_s)$; $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$.

7.2 Siano $f, g : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ due applicazioni continue tra gli stessi spazi topologici.
Sia $\Delta := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Dimostrare che se $(Y, \mathcal{T}_Y)$ è uno spazio T_2 allora Δ è un chiuso in $(X, \mathcal{T}_X)$.

7.3 Sia $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'n-sfera. Determinare una relazione d'equivalenza ρ su $\mathbf{S}^n$ tale che $\mathbf{S}^n/\rho \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Ovvero dimostrare che $\mathbf{S}^n/\rho$ con la topologia quoziente indotta da ρ è omeomorfo allo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dove $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è definito come lo spazio quoziente $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}/\sim$, dove $\sim$ è la relazione:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\ \ t.\,c.\ y_i = \lambda x_i,\ i = 0, ..., n.$$

Verificare inoltre che lo spazio proiettivo reale di n-dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietá topologica n-dimensionale, ovvero verificare che lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

(i) ha una base numerabile di aperti;

(ii) è uno spazio di Hausdorff (T_2);

(iii) è localmente omeomorfo allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$.

(Sugg. Per dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2 si utilizzi che $\boldsymbol{S}^n/\rho \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$).

7.4 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico *normale* e sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ un'applicazione continua, chiusa e suriettiva.

(i) Verificare che $(Y, \mathcal{T}_Y)$ è *normale*.

(ii) Dedurre da (i) che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è *normale*.