Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 28/5/2003

10.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Verificare che $(X, \mathcal{T})$ è connesso se e solo se ogni applicazione continua da $(X, \mathcal{T})$ ad uno spazio topologico discreto $(Y, \mathcal{P}(Y))$ é costante.

10.2 Sia X uno spazio topologico compatto e sia Y uno spazio topologico connesso e $T2$. Dimostrare che ogni applicazione continua e aperta

$$f : X \to Y$$

è necessariamente suriettiva.

10.3 Verificare che gli insiemi $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici di ordine n invertibili e l'insieme $O(n, \mathbb{R})$ delle matrici ortogonali sono sconnessi in $(\mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \mathcal{T}_e)$.

10.4 Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ un sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$.

(i) Verificare che E è connesso.

(ii) Verificare che $E - \{(0, 0)\}$ ha 4 componenti connesse.

(iii) Dimostrare che $(E, \mathcal{T}_e) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (E non è omeomorfo alla retta euclidea).

10.5 Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ sono sconnessi:
$C_1 := \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \neq 0\}$;
$C_2 := \mathbb{R}^2 - \{(q, 0) : q \in \mathbb{Q}\}$;
$C_3 := D_1(1, 0) \cup D_1(-1, 0)$;
$C_4 := \overline{C_3}$.

10.6 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia C un sottoinsieme non vuoto di X.

(i) Verificare che: C aperto, chiuso e connesso $\Rightarrow$ C è componente connessa di $(X, \mathcal{T})$.

(ii) Determinare un esempio di componente connessa non aperta.

10.7 Sia $\{C_t\}_{t \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi per archi di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$. Verificare che se $\cap_{t \in I} C_t \neq \emptyset$, allora $\cup_{t \in I} C_t$ è connesso per archi.

10.8 Verificare con un esempio che se E è un sottoinsieme connesso per archi di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$, la sua chiusura $\overline{E}$ non è necessariamente connnessa per archi.

10.9 Dimostrare le seguneti affermanzioni:

(i) Ogni spazio topologico banale $(X, \mathcal{I}_X)$ è connesso per archi.

(ii) Ogni sottoinsieme convesso di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ è connesso per archi.

(iii) Se $(X, \mathcal{T})$ è connesso per archi e $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$, anche $(X, \mathcal{T}')$ è connesso per archi.

(iv) Se X ha cardinalitá ≥ 2, $(X, \mathcal{P}(X))$ non è connesso per archi.

10.10 Sai $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

(i) Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i1) ogni componente connessa per archi è aperta;

(i2) ogni punto $x \in X$ ha un intorno connesso per archi.

(ii) Dedurre da (i) che $(X, \mathcal{T})$ è connesso per archi $\Longleftrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ è connesso e vale la condizione $(i2)$.

Dimostrare che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto per ogni $n \geq 1$.