Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli

Tutorato del 9/4/2003

6.1 Siano $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ spazi topologici non vuoti. Dimostrare che:

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \text{ è separabile} \Longleftrightarrow (X_1, \mathcal{T}_1) \text{ e } (X_2, \mathcal{T}_2) \text{ sono separabili.}$$

6.2 Sia $(\mathbb{R}^2, j_s \times j_s)$ lo spazio topologico prodotto di $(\mathbb{R}, j_s)$ per se stesso.
Sia $F : (\mathbb{R}^2, j_s \times j_s) \to (\mathbb{R}, j_s)$ l'applicazione cosí definita:

$$F(x, y) = x + y, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Verificare che F é continua.

6.3 Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici.

(i) Verificare che se f è aperta o chiusa allora f è un' identificazione.

(ii) Dare un esempio di un' identificazione che non è ne aperta e ne chiusa.

6.4 Si consideri la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$:

$$x \rho y \Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Verificare che $(\mathbb{R}/\rho, \mathcal{T}_e/\rho) \cong ([0, +\infty), \mathcal{T}_e)$.

6.5 Sia $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$.
Sia inoltre ρ la segunte relazione su $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y)\rho(x', y') \Leftrightarrow |x| = |x|' \text{ e } |y| = |y'|.$$

Dimostrare che $(T, \mathcal{T}_e|_T) \cong (\mathbb{R}^2/\rho, \mathcal{T}_e/\rho)$, dove T ha la topologia euclidea di sottospazio e su $\mathbb{R}^2/\rho$ c' è la topologia quoziente.

6.6 In $(\mathbb{R}, i_s)$ sia definita la seguente relazione di equivalenza:

$$x \rho y \Leftrightarrow y = \pm x.$$

(i) Determinare la topologia quoziente i_s/ρ.

(ii) Verificare che $(\mathbb{R}/\rho, i_s/\rho)$ è omeomorfo alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$ con la topologia banale.