**Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica**
**Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003**
**Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: L. Di Biagio, P. Tranquilli**

**Tutorato del 12/3/2003**

**2.1** Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico discreto. Si consideri $\mathcal{A} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi puntiformi di $X$.
Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, dimostrare che

$$\mathcal{B} \text{ \emph{è base per} } \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}.$$

**2.2** Sia

$$\mathcal{B} := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}.$$

(i) Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$.

(ii) Verificare che $\mathcal{T}_e \subsetneq \mathcal{T} \subsetneq j_s$, dove $\mathcal{T}_e$ è la topologia euclidea e dove $j_s$ è la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base gli intervalli limitati aperti a sinistra e chiusi a destra.

**2.3** Sia $\mathcal{S} := \{(n, n+1], \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Determinare la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ avente come base la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$.

(ii) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è strettamente meno fine di $j_s$.

(iii) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare un intorno $U_a$ di $a$ tale che per ogni altro intorno $V_a$ di $a$ si ha che $U_a \subset V_a$.

**2.4** Sia $n \geq 2$ e sia $S(i; a, b) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < x_i < b\}$ la striscia ortogonale all'asse $i$-esimo di $\mathbb{R}^n$ ad estremi $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

(i) Verificare che $S(i; a, b) \in \mathcal{T}_e$ (topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$).

(ii) Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le strisce di $\mathbb{R}^n$, verificare che la famiglia $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ costituita da tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ è una base per la topologia euclidea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$.

**2.5** Dato $X$ insieme tale che $|X| \geq 3$. Sia $\mathcal{S} := \{X - \{x\}, \forall x \in X\}$.
Dimostrare che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ sono una base per lo spazio $(X, \mathcal{T}_{cof})$.

**2.6** Dimostrare che gli spazi $(\mathbb{R}, j_d)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ non hanno una base numerabile di aperti.