UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2002-2003

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensionedi V;

(b) Si enunci il teorema principale che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ kx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

Si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Siano k un numero reale, $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - w = 0 \end{cases}$$

e $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale

$$U_k =< (2,2,1,2),\ (1,1,0,1),\ (3,3,1,k) > .$$

(a) Si determinino due basi di W e U_k;

(b) si determinino le dimensioni di $U_k + W$ e di $U_k \cap W$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di k per i quali

$$U_k \oplus W = \mathbb{R}^4.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e U, W_1, W_2 suoi sottospazi tali che $W_1 \not\subset W_2, W_2 \not\subset W_1$.

(a) Si dimostri che esiste una condizione, solo in termini di $\dim W_1$, $\dim W_2$, che implica che $U \subset W_1 + W_2$;

(b) si dimostri che esiste una condizione, diversa dalla precedente, in termini di $\dim W_1$, $\dim W_2$, $\dim U$, $\dim U \cap W_1$, $\dim U \cap W_2$, che implica che $U \subset W_1 + W_2$.