Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2002/2003

FM3 - Meccanica lagrangiana e hamiltoniana

Seconda prova di esonero (12-06-03)

CORREZIONE

Esercizio 2.

2.1. Canonicità. Perché la trasformazione sia canonica occorre che le parentesi di Poisson

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}$$

soddisfino l'identità

$$\{Q, P\} = 1.$$

Nel nostro caso si ha

$$\{Q, P\} = -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -q\,(t+1)\left(\cos q + \frac{\partial f}{\partial q}\right),$$

e quindi dobbiamo imporre

$$\frac{\partial f}{\partial q} = -\frac{1}{q\,(t+1)} - \cos q,$$

da cui si ottiene, per integrazione esplicita,

$$f \equiv f(q,t) = -\frac{1}{t+1}\log|q| - \sin q.$$

La trasformazione

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp\,(t+1)\,, \\ P = -\dfrac{1}{t+1}\log|q|, \end{cases}$$

è quindi canonica purché $f(q,t)$ sia definita nel dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2.2. Funzione generatrice. Poiché P dipende solo da q (e da t), non è possibile scegliere una funzione generatrice di seconda specie.

Cerchiamo allora, per esempio, una funzione generatrice di prima specie $F(q,Q)$. Dobbiamo quindi imporre che si abbia

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q},$$

e verificare che risulti

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \neq 0.$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial q} &= p = \frac{Q - q^2}{q\,(t+1)} = \frac{1}{t+1}\left(\frac{Q}{q} - q\right), \\
\frac{\partial F}{\partial Q} &= -P = \frac{1}{t+1}\log|q|,
\end{aligned}$$

così che, integrando la prima rispetto a q, si ricava

$$F(q,Q) = \frac{1}{t+1}\left(Q\log|q| - \frac{1}{2}q^2\right) + c_1(Q,t),$$

mentre, integrando la seconda rispetto a Q, si ricava

$$F(q,Q) = \frac{1}{t+1}\,Q\log|q| + c_2(q,t),$$

dove le funzioni $c_1(Q,t)$ e $c_2(q,t)$ sono, a questo livello, arbitrarie.

Imponendo che le due espressioni trovate per la $F(q,Q)$ siano uguali, e ponendo uguali a zero eventuali termini costanti (in q e Q), troviamo

$$F(q,Q) = \frac{1}{t+1}\left(Q\log|q| - \frac{1}{2}q^2\right),$$

che costituisce la funzione generatrice cercata, dato che risulta

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} = \frac{1}{q\,(t+1)} \neq 0$$

per $(q,t) \in \mathcal{D}$.

<u>Esercizio 4.</u>

4.1. Hamiltoniana. Ponendo

$$\begin{cases}
p_1 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, \\
p_2 = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = \dfrac{1}{1+q_1^2}\dot{q}_2,
\end{cases}$$

la hamiltoniana si ottiene come trasformata di Legendre della lagrangiana. Quindi

$$\begin{aligned}
H(q_1,q_2,p_1,p_2) &= \dot{q}_1 p_1 + \dot{q}_2 p_2 - \mathcal{L}(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2) \\
&= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}\left(1+q_1^2\right)p_2^2 + \left(1+q_1^2\right)\left(q_1^2+q_2^2-1\right).
\end{aligned}$$

4.2. Equazione di Hamilton-Jacobi. Possiamo riscrivere la hamiltoniana come

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \left(q_1^4 - 1\right) + \left(1 + q_1^2\right)\left(\frac{1}{2}p_2^2 + q_2^2\right),$$

quindi il sistema è separabile.

Quindi possiamo cercare una funzione caratteritica di Hamilton, che risolva l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H\left(q_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}\right) = \alpha_1$$

nella forma

$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) + W_2(q_2, \alpha_2).$$

Otteniamo dunque

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_2}{\partial q_2}\right)^2 + {q_2}^2 = \alpha_2, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + q_1^4 + \alpha_2 q_1^2 - 1 + \alpha_2 = \alpha_1. \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione fissiamo α_2 e $q_{2,0}$ in modo che si abbia

$$\alpha_2 - q_2^2 \geq 0.$$

Quindi dobbiamo scegliere $\alpha_2 \geq 0$ e, fissato α_2, dobbiamo scegliere $q_{2,0} \in \mathcal{Q}_2$, dove

$$\mathcal{Q}_2 = \left\{q_2 \in \mathbb{R} \ : \ |q_2| \leq \sqrt{\alpha_2}\right\}.$$

Quindi

$$W_2(q_2, \alpha_2) = \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2(\alpha_2 - (q_2')^2)}\, \mathrm{d}q_2',$$

dove $q_{2,0}$ è un valore arbitrario in $\mathcal{Q}_2$ e il segno $\pm$ dipende dal segno del momento p_2 all'istante iniziale.

Per risolvere la seconda equazione dobbiamo fissare α_1 e $q_{1,0}$ in modo che si abbia

$$\alpha_1 - q_1^4 - \alpha_2 q_1^2 + 1 - \alpha_2 \geq 0.$$

Quindi dobbiamo scegliere

$$\alpha_1 \geq \min_{q_1 \in \mathbb{R}} f(q_1),$$

avendo definito

$$f(q_1) = q_1^4 + \alpha_2 q_1^2 - 1 + \alpha_2,$$

e, fissato α_1, dobbiamo scegliere $q_{1,0} \in \mathcal{Q}_1$, dove

$$\mathcal{Q}_1 = \{q_1 \in \mathbb{R} \, : \, f(q_1) \leq \alpha_1\}.$$

In conclusione otteniamo

$$W_1(q_1, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1'))} \, \mathrm{d}q_1',$$

dove $q_{1,0}$ è un valore arbitrario in $\mathcal{Q}_1$ e il segno $\pm$ dipende dal segno del momento p_1 all'istante iniziale (ovviamente la dipendenza da α_2 è attraverso la funzione f (e quindi anche attraverso la definizione del dominio $\mathcal{Q}_1$).

Dobbiamo quindi studiare la funzione $f(q_1)$.

Chiamiamo $q = q_1$ per semplicità. Poiché la funzione $f(q)$ è pari è sufficiente studiarla per $q \geq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} f(q) &= q^4 + \alpha_2 q^2 - 1 + \alpha_2, \\ f'(q) &= 4q^3 + 2\alpha_2 q, \\ f''(q) &= 12q^2 + 2\alpha_2. \end{aligned}$$

così che risulta $f'(q) = 0$ se e sole se $q = 0$; inoltre $f''(0) = 2\alpha_2$. Quindi, se $\alpha_2 > 0$, troviamo che $q = 0$ è un punto di minimo. Se $\alpha_2 = 0$ la funzione $f(q) = q^4 - 1$ ha un unico punto stazionario, $q = 0$, che è ancora un punto di minimo.

In corrispondenza del punto di minimo risulta $f(0) = -1 + \alpha_2$, che dà l'espressione corretta del valore di $f(q)$ in corrispondenza del punto di minimo anche per $\alpha_2 = 0$. Quindi concludiamo che si deve avere

$$\alpha_1 \geq \min_{q_1 \in \mathbb{R}} f(q_1) = -1 + \alpha_2.$$

Per $\alpha_1 \geq -1 + \alpha_2$, l'insieme $\mathcal{Q}_1$ è definito da

$$\mathcal{Q}_1 = \{q_1 \in \mathbb{R} \, : \, -q_+(\alpha_1) \leq q_1 \leq q_+(\alpha_1)\},$$

dove $q_+(\alpha_1)$ è la soluzione positiva

$$q_+(\alpha_1) = \sqrt{\frac{-\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4\,(1 - \alpha_2 + \alpha_1)}}{2}}$$

di $f(q) = \alpha_1$.

In conclusione, con le notazioni sopra introdotte, la funzione caratteristica di Hamilton è data da

$$W(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm \int_{q_{1,0}}^{q_1} \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1'))} \, \mathrm{d}q_1' \pm \int_{q_{2,0}}^{q_2} \sqrt{2(\alpha_2 - (q_2')^2)} \, \mathrm{d}q_2'.$$

4.3. Variabili d'azione. L'analisi del punto precedente mostra che possiamo definire le variabili d'azione per $\alpha_2 \in (0, \infty)$ e per $\alpha_1 \in (-1 + \alpha_2, \infty)$.

Definiremo allora

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{d}q_2 \sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)},$$

mentre avremo

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}$$

con le notazioni di prima.

4.4. Frequenze. Per determinare la frequenze ω_1 e ω_2, si deve tener conto che si ha, per definizione,

$$\omega_k = \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_k}, \qquad k = 1, 2,$$

dove $\partial \alpha_1 / \partial J_k$ è uguale all'elemento $(A^{-1})_{1k}$ se A è la matrice di elementi

$$A_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \alpha_j}.$$

Dobbiamo quindi calcolare la matrice inversa di A. Si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} - \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & -\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \\ -\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} & -\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \\ 0 & \dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix},$$

poiché risulta

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1} = 0,$$

dal momento che J_2 dipende solo da α_2.

Alla fine troviamo

$$\omega_1 = \frac{\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}} = \frac{1}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}}, \qquad \omega_2 = -\frac{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}}{\dfrac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}},$$

e possiamo perciò concludere che le frequenze si possono esprimere in termini dei tre integrali definiti

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{d}q_2 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}}, \\ \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}, \\ \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}} \left(-\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \right), \end{aligned}$$

dove si sono utilizzate le espressioni trovate al punto precedente per le variabili d'azione. Inoltre si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 1 + q_1^2.$$

Quindi introducendo gli integrali nelle espressioni per ω_1 e ω_2 troviamo le frequenze espresse come integrali definiti:

$$\omega_1 = \frac{1}{\frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}},$$

$$\omega_2 = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1+q_1^2}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}{\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{\alpha_2}}^{\sqrt{\alpha_2}} \mathrm{d}q_2 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_2 - q_2^2)}}\ \frac{1}{\pi}\int_{-q_+(\alpha_1)}^{q_+(\alpha_1)} \mathrm{d}q_1 \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_1 - f(q_1))}}}.$$