II compito di FM2 a.a. 2002/2003

1) Classificare e ridurre a forma canonica la seguente equazione

$$4u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} + 8u_x - 6u_y + 2u + x^3 + y^3 = 0$$

2) Risolvere il seguente problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ u_t(x,0) = xe^{-x^2} \end{cases}$$

Determinare se esistono (x,t) tali che $u(x,t) = 3$.

3) Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ risolvere il seguente problema nell' intervallo $[0,1]$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \alpha u & 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = sin(2\pi x) + sin(4\pi x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

Determinare al variare di α il limite della soluzione per $t \mapsto +\infty$.

4) Risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \Omega,\ \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ u(x,0) = sin(\pi x) + sin(2\pi x) \\ u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = sin(\pi y) \\ u(1,y) = 0 \end{cases}$$

5) Dire quante soluzioni ha il problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,y) = 1 & (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \ o \ y = 0\} \end{cases}$$

e determinarne 3 linearmente indipendenti.

6) Sia data una corda di lunghezza 1 con estremi fissi e deviazione iniziale nulla. Sia

$$\psi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -x+1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

la velocita' iniziale trasversale. Determinare l'evoluzione della corda e quante volte la corda torna nella posizione iniziale.