Tutorato di CAM
Fabrizio Fanelli
Studi di Funzioni

Studiare le seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

2. $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$

3. $f(x) = e^{x - |x^2 - x - 2|}$

4. $f(x) = e^{x/3}\,(3x-2)^{1/9}$

5. $f(x) = \sin x - \sin^2 x$

6. $f(x) = \sin^2 x - \cos x$

7. $f(x) = x e^{\frac{1}{\log x}}$

8. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$
Soluzione. $I_E = \{x : x(x+1) \geq 0\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$ (razionalizzare) quindi la retta $y = 1/2$ è un asintoto orizzontale.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
A.O. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$ (porre $y = -x$)
$\lim_{x \to -\infty} f(x) + 2x = -1/2$ quindi la retta $y = -2x - 1/2$ è un Asintoto Obliquo.
$f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 2\sqrt{x^2+x}$ quadrando si ottiene che la disequazione è verificata ovunque è definita la radice, ma a patto che $2x + 1 \geq 0$ ($x \geq -1/2$ quindi $x \geq 0$ intersecando con I_E).
In $x = 0$ $f'(x) \to +\infty$ allora c'é un asintoto verticale. Cosa analoga succede in $x = -1$.
$$f''(x) = \frac{2\sqrt{x^2+x} - (2x+1)\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}}{4(x^2+x)} < 0 \forall x$$

9. $f(x) = x^2(\log|x| - 1)$

Soluzione. $I_E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, inoltre la funzione è pari, quindi la possiamo studiare solo per $x > 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $f(x) = 0$ per $x = \pm e$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (limite notevole) quindi in 0 c'è una discontinuità eliminabile.

A.O. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ quindi non ci sono A.O.

$f'(x) = 2x(\log x - 1) + x^2(\dfrac{1}{x}) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e})$ e $x = 0$. In 0 c'è un Massimo ed in $\pm\sqrt{e}$ c'è un minimo.

$f''(x) = 2\log x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\dfrac{1}{2}}$.

10. $f(x) = 2\arctan\frac{1}{x} - \ln|x-2|$

Soluzione. $I_E = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$;

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$, $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \pi - \ln 2 > 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\pi - \ln 2 < 0$, $\quad \lim_{x\to 2^\pm} f(x) = +\infty$

Non ci sono asintoti obliqui, infatti $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Per $x > 2$ la funzione decresce, infatti $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x-2} < 0$.

Mentre per $x < 2$ ci sono un massimo ed un minimo relativi:

$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{2-x} \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -3,\ x \geq 1$.

Il minimo relativo vale $f(1) = \frac{\pi}{2}$ e il massimo relativo vale $f(-3) = -2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \ln 5 < 0$.

Infine la derivata seconda: per $x > 2$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} > 0$$

Per $x < 2$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

In zero si ha un cambio di concavità.

Con un foglio di lati a e b si vuole costruire una scatola (senza coperchio) ritagliando 4 quadrati di lato r agli angoli e ripiegando il lembi.Come si deve scegliere r affinché il volume sia massimo?