Soluzioni 12-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

28 maggio 2003

1. Calcoliamo

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy.$$

Sfruttando la simmetria del dominio T rispetto agli assi e la parità della funzione integranda rispetto ad x e y si ottiene:

$$\iint_T x^2\, dx\, dy = 4 \iint_{\tilde{T}} x^2\, dx\, dy$$

dove, posto

$$\begin{aligned} T_1 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + 4y^2 \leq 4\big\} \\ T_2 &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\big\} \end{aligned}$$

risulta $\tilde{T} = T_1 \setminus T_2$.

Quindi il calcolo dell'integrale si riduce a

$$\iint_{\tilde{T}} x^2\, dx\, dy = 4\Big(\iint_{T_1} x^2\, dx\, dy - \iint_{T_2} x^2\, dx\, dy\Big).$$

Per il calcolo del primo integrale operiamo la trasformazione di variabili

$$\begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big[$$

mentre per il secondo integrale è conveniente la sostituzione in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad\qquad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$$

Infine risulta

$$\begin{aligned} 4\left(8\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)\rho^3\,d\theta\,d\rho - \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)\rho^3\,d\theta\,d\rho\right) &= 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{7}{4}\pi. \end{aligned}$$