Soluzioni 3-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

21 marzo 2003

1. Vale che $f(0,0,0) = 0$.

Calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0,0)} = \frac{2x}{1+x^2+y^2} + \cos(x+y^2+z) - 1\Big|_{(0,0,0)} = 0$$

e analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0,0)} = \frac{2y}{1+x^2+y^2} + 2y\cos(x+y^2+z)\Big|_{(0,0,0)} = 0.$$

Invece

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{(0,0,0)} = +\cos(x+y^2+z) + 2z\Big|_{(0,0,0)} = 1.$$

Quindi possiamo esplicitare z in funzione di x e y, cioè esiste

$$g:\, A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^∞ tale che $z = g(x,y)$ e $f(x,y,z(x,y)) = 0$ in un intorno di $(0,0,0)$.

2. Vale che $F(0,0) = 0$ e inoltre

$$F_y(x,y)\Big|_{(0,0)} = e^{x+y} + x + 1\Big|_{(0,0)} = 2 \neq 0.$$

Quindi possiamo applicare il TFI nel punto $(0,0)$.

Osserviamo ora che

$$F_y(x,y) = e^{x+y} + x + 1 \geq \frac{1}{2} \qquad\qquad \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Scegliamo dunque

$$r = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che per il teorema della permanenza del segno deve essere

$$F(x,-\rho) < 0 < F(x,\rho) \qquad\qquad \text{se} \quad |x| \leq r = \frac{1}{2}$$

perché la F è crescente rispetto ad y per $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Applicando il teorema di Lagrange otteniamo che

$$F(x,y) \geq F(x,0) + \inf F_y(x,0)y \geq e^x - 1 + \frac{y}{2} > 0$$

se scelgo per esempio

$$|y| \leq \rho = 2.$$

D'altra parte

$$F(x,y) \leq F(x,0) + \inf F_y(x,0)y \leq e^x - 1 + \frac{y}{2} = \sqrt{e} - 2 < 0$$

per la stessa scelta di r e ρ.
In conclusione possiamo prendere

$$r = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \rho = 2.$$

3. Vale che $F(0) = 0$.

F è di classe C^∞ e inoltre

$$\nabla_{z,v} F = \begin{pmatrix} y + 3 - \frac{1}{[\cos(z+v)]^2} & -\frac{1}{[\cos(z+v)]^2} \\ \cos(z+v) & \cos(z+v) - x \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\det(\nabla_{z,v}F)\big|_{(0,0)} = 3 \neq 0.$$

Sono verificate le ipotesi del TFI, quindi esiste un'unica funzione $(z(x,y), v(x,y))$ definita in un intorno di $(0,0)$ e qui di classe C^∞, tale che

$$(z(0,0), v(0,0)) = 0.$$