

# Soluzioni VII

3/12/2002

Differenziabilità

**Esercizio 1.** Sia  $f(x) = |x|^\alpha = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ , dove  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Allora, per esempio, calcoliamo  $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x_1$ . Da cui  $\frac{\partial |x|^\alpha}{\partial x_i} = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$ .

**Esercizio 2.** (i) Ricordiamo che una funzione  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice positivamente omogenea di grado  $\alpha$  se  $\forall t > 0$  si ha  $f(tx) = t^\alpha f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Se una funzione  $f$  è positivamente omogenea di grado  $\alpha$  continua su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  non identicamente costante allora può essere estesa ad una funzione continua su tutto  $\mathbb{R}^n$  se e solo se  $\alpha > 0$  ed inoltre  $f(0) = 0$ . La nostra funzione è positivamente omogenea di grado  $2\alpha - \beta$ : infatti si ha  $f(tx) = \frac{t^{2\alpha} |x_1 x_2|^\alpha}{t^\beta |x|^\beta} = t^{2\alpha-\beta} \frac{|x_1 x_2|^\alpha}{|x|^\beta} = t^{2\alpha-\beta} f(x)$ .

Inoltre  $f$  è continua su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  essendo composizione e prodotto di funzioni continue, quindi la funzione  $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^2$  se e solo se  $2\alpha - \beta > 0$ . (ii)  $f$  ha derivate direzionali in  $x_0$  se e solo se esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\xi) - f(x_0)}{t}$$

per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^2$ .

Sia quindi  $x_0 = (0, 0)$ . Si ha  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\xi)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\alpha-\beta-1} f(\xi)$ , e questo limite esiste se e solo se  $2\alpha - \beta \geq 1$ .

(iii)  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + |h|) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Dal calcolo fatto sulle derivate direzionali si deduce che  $\nabla f(x_0) = (0, 0)$ , e quindi quel limite si riduce a  $\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(h)|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|h_1 h_2|^\alpha}{|h|^{\beta+1}} \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|h|^{2\alpha}}{|h|^{\beta+1}} \rightarrow 0$  se e solo se  $2\alpha - \beta > 1$ . Se invece fosse  $2\alpha - \beta < 1$  allora non esisterebbero le derivate direzionali e quindi  $f$  non potrebbe essere differenziabile. Nel caso invece in cui  $2\alpha - \beta = 1$  allora posso prendere la successione  $h_n = (1/n, 1/n)$  e il limite è diverso da 0.

Riassumendo si ha:

- (i)  $2\alpha - \beta > 0$ ;
- (ii)  $2\alpha - \beta \geq 1$ ;
- (iii)  $2\alpha - \beta > 1$ .

**Esercizio 3.** (i) Questa funzione si può immaginare come un paraboloide con vertice nel punto  $(0,0,1)$  e concavità rivolta verso il basso se  $|x| < 1$ , al di fuori di questo insieme  $f$  è costantemente nulla.  $f$  è ovviamente continua per  $|x| < 1$ , essendo composizione e somma di funzioni continue. Se  $|x| > 1$  allora la funzione essendo costante è continua. Studiamo che succede per  $|x| = 1$ . Sia  $x_0 : |x_0| = 1$ ,  $\epsilon > 0$ , voglio vedere se  $\exists \delta > 0$  tale che  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  se  $|x - x_0| < \delta$ . Dobbiamo distinguere due casi: il primo, ovvio, in cui  $|x| \geq 1$  e il secondo in cui  $|x| < 1$ . Se  $|x| \geq 1$  allora  $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$  per ogni  $\epsilon$  e  $\delta$ . Se  $|x| < 1$  si ha  $|f(x) - f(x_0)| = |1 - |x|^2| = |1 - |x|| (1 + |x|) \leq 2(|1 - |x_0|| + ||x_0| - |x||) \leq 2|x - x_0| < 2\delta = \epsilon$ . Prendendo  $\delta = \epsilon/2$  si dimostra che la funzione è continua in  $\mathbb{R}^2$ .

Studiamo la differenziabilità in  $x_0$  con  $|x_0| = 1$ , vediamo se

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = 0.$$

Dove  $\nabla f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0))$ . Ora si può vedere che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} -2x_i & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Prendiamo, per esempio due successioni  $h_n = x_0/n$  e  $-h_n$ .

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x_0 + h_n) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h_n|}{|h_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x_0 - h_n) - f(x_0) + \nabla f(x_0)h_n|}{|-h_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 1/n = 2 \neq 0.$$

Quindi la funzione non è differenziabile in  $x_0$  se  $|x_0| = 1$ . Se  $|x_0| < 1$  e  $|x_0 + h| < 1$  si ha

$$\begin{aligned} \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|1 - |x_0 + h|^2 - 1 + |x_0| + 2x_0h|}{|h|} \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{||x_0|^2 + |h|^2 + 2x_0h - |x_0|^2 - 2x_0h|}{|h|} = 0. \end{aligned}$$

Se, invece  $|x_0| > 1$  e  $|x_0 + h| > 1$  si ha

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0)h|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{0}{|h|} = 0.$$

La funzione risulta quindi differenziabile  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ .

(ii) Abbiamo trovato  $\delta = \epsilon/2$  quindi se  $\epsilon = 1/100$  basta prendere  $\delta = 1/200$ .

(iii) Sia  $x_0 = (\sqrt{2}, 1)$ , allora  $|x_0| = \sqrt{3} > 1$  quindi, per quanto visto nel primo punto, la funzione è differenziabile in  $x_0$ .

**Esercizio 4.** (i) Sia  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ , e sia  $\epsilon > 0$  voglio vedere se  $\exists \delta > 0 : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$  se  $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ . Abbiamo quindi  $|(x - 1, y)| < \delta$ , quindi in particolare  $|y| < \delta$ . Ora  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x, y)| \leq \frac{|y|}{e^{\frac{|y|}{x-1}^2}} \leq |y| < \delta = \epsilon$ . Se prendo quindi  $\delta = \epsilon$  dimostro che la funzione è continua in  $(1, 0)$ .

Calcoliamo le derivate direzionali in  $(1, 0)$ , se esistono. Prendo  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  con

$\xi_1 \neq 0$  Avremo quindi, in questo caso,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t\xi_1, t\xi_2) - f(1, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\xi_2 e^{-\left(\frac{t\xi_2}{t\xi_1}\right)^2}}{t} = \xi_2 e^{-\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2}$ . Mentre se  $\xi = (0, \xi_2)$ , avremo  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1, t\xi_2) - f(1, 0)}{t} = 0$ . Allora

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{cases} \xi_2 e^{-\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^2} & \text{se } \xi_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } \xi_1 = 0 \end{cases}$$

Da cui si deduce che esistono tutte le derivate direzionali. Calcoliamo ora  $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ . Dallo studio fatto sulle derivate direzionali si ha  $\nabla f = (0, 0)$ . Studiamo la differenziabilità in  $(1, 0)$ :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(1+h_1, h_2) - f(1, 0) - \nabla f(1, 0)h|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{h_2 e^{-\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}}{|h|} & \text{se } h_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } h_1 = 0 \end{cases}$$

Si vede che il valore di questo limite dipende da  $h$ . Infatti se  $h = (0, 1/n)$  il limite è 0, mentre se  $h = (1/n, 1/n)$  il limite è  $\frac{1}{e\sqrt{2}} \neq 0$ . Quindi la funzione non è differenziabile in  $(0, 1)$ .

(ii) Sia  $(x_0, y_0) = (1, 1)$  allora per definizione  $f(1, 1) = 0$  devo quindi studiare  $|f(x, y)|$  con  $|(x, y) - (1, 1)| = |(x-1, y-1)| < \delta$ . Osserviamo che, se  $\delta < 1/2$ ,  $|y-1| < 1/2 \Rightarrow 1/2 < y < 3/2$  e  $|x-1| < \delta$ . Allora  $|f(x, y)| = \frac{|y|}{e^{\left(\frac{|y|}{x-1}\right)^2}} < \frac{3}{2e \frac{1}{4\delta^2}} = 1/100 \Leftrightarrow \delta = 1\sqrt{\frac{-1}{4 \log(1/150)}}$ .

**Esercizio 5.** La funzione è continua se  $x \neq 0$ , vediamo che succede se  $x = 0$ . Prendiamo il punto  $(0, y)$  e una qualsiasi direzione  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , vorrei che  $\lim_{t \rightarrow 0} f(0+t\xi_1, y+t\xi_2) = f(0, y) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} (t\xi_1)^2 + (y+t\xi_2) - y = 0 \Leftrightarrow y = 0, 1$ . Questo non basta però per concludere che la funzione è continua nei punti

$(0,0)$  e  $(0,1)$ , ma basta però a concludere che non ci sono altri punti dove la funzione può essere continua. Dobbiamo quindi studiare "a mano" la continuità in questi punti. Iniziamo dall'origine: sia  $|(x,y) - (0,0)| < \delta$  con  $x \neq 0$  allora  $|f(x,y) - f(0,0)| = |x^2 + y^2| < \delta^2 = \epsilon$  se  $\delta = \sqrt{\epsilon}$ , mentre se  $x = 0$  si ha  $|f(x,y) - f(0,0)| = |y| < \delta = \epsilon$  prendendo quindi  $\delta = \min\{\epsilon, \sqrt{\epsilon}\}$ , si verifica la continuità in  $(0,0)$ . Consideriamo il punto  $(0,1)$  e distinguiamo, come prima i due casi:  $x \neq 0$  e  $x = 0$ . Nel primo si ha  $|f(x,y) - f(0,1)| = |x^2 + y^2 - 1| = ||(x,y)|^2 - |(0,1)|^2| = (|(x,y)| + |(0,1)|)||x,y| - |(0,1)|| \leq 2|(x,y) - (0,1)| < 2\delta = \epsilon$  se per esempio  $\delta = \min\{1, \epsilon/2\}$ . Nel secondo  $|f(x,y) - f(0,1)| = |y - 1| < \delta$ . Possiamo riassumere tutti i casi prendendo  $\delta = \min\{1, \epsilon/2\}$ , con questa scelta si dimostra che la funzione è continua anche in  $(0,1)$ .

Studiamo le derivate direzionali:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t\xi_1, y + t\xi_2) - f(0, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \begin{cases} t(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{y^2 - y}{t} + 2y\xi_2 & \text{se } \xi_1 \neq 0 \\ \xi_2 & \text{se } \xi_1 = 0 \end{cases}$$

esiste se e solo se  $y = 0, 1$  e in tali caso si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{cases} 2y\xi_2 & \text{se } \xi_1 \neq 0 \\ \xi_2 & \text{se } \xi_1 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo ora le derivate parziali nei punti  $(0,0)$  e  $(0,1)$ :  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 1$  con  $y = 0, 1$ . Vediamo quindi la differenziabilità, in  $(0,0)$ .

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)h|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{|h_1^2 + h_2^2 - h_2|}{|h|} & \text{se } h_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } h_1 = 0 \end{cases}$$

Si vede chiaramente che questo limite dipende dalla scelta di  $h$ : infatti scegliendo  $h = (0, 1/n)$  il limite è 0 mentre scegliendo  $h = (1/n, 1/n)$  il limite è  $1 - 1/\sqrt{2}$ . Se consideriamo il punto  $(0,1)$  si avrà

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(h_1, 1 + h_2) - f(0,1) - \nabla f(0,1)h|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{|h_1^2 + h_2^2 + 2h_2 - h_2|}{|h|} & \text{se } h_1 \neq 0 \\ 0 & \text{se } h_1 = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso se scegliamo due successioni diverse possiamo ottenere limiti diversi (per esempio  $h = (0, 1/n)$  e  $h = (1/n, 1/n)$ ). Quindi la funzione non è differenziabile per  $x = 0$  mentre lo è per  $x \neq 0$ ; infatti in questo caso  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$  allora

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) - \nabla f(x, y)h|}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{|h|} = 0.$$